Másodrendű differenciálegyenletek

ÁTTEKINTÉS Az alábbiakban másodrendű differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni: ez az egyenlettípus gyakran kerül elő a tudományos és a mérnöki gyakorlatban — gondoljunk például a rugók rezgéseit vagy az elektronikus áramköröket leíró egyenletekre. A fejezet során megismerjük a másodrendű egyenletek különféle megoldási módszereit.

1. Másodrendű lineáris egyenletek

Másodrendű lineáris differenciálegyenlet alatt a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x) \tag{1}$$

alakú egyenleteket értjük. Ez az egyenlet az y ismeretlen függvényben és deriváltjaiban lineáris. Feltesszük, hogy a P, Q, R és G függvények egy alkalmas I nyílt intervallumban folytonosak. Ha $G(x)$ azonosan nulla az I intervallumon, akkor az egyenletet **homogénnek**, különben **inhomogénnek** mondjuk. A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja tehát

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{2}$$

Azt is feltesszük, hogy $P(x)$ sehol sem veszi fel a nulla értéket az I intervallumban.

A (2) egyenlet megoldásával kapcsolatban két alapvető tényt mondunk ki. Ezek közül az első azt állítja, hogy ha ismerjük a homogén lineáris egyenlet két megoldását, az y_1 és y_2 függvényeket, akkor ezen megoldások tetszőleges $y = c_1y_1 + c_2y_2$ **lineáris kombinációja** is megoldás, a c_1 és c_2 konstansok tetszőleges választása mellett.

1. TÉTEL — A szuperpozíció elve. Ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ a (2) homogén lineáris egyenlet két megoldása, akkor tetszőleges c_1 és c_2 konstansok esetén az

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

függvény is megoldása a (2) egyenletnek.

Bizonyítás. Az y-ra megadott kifejezést behelyettesítve (2)-be azt kapjuk, hogy

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y =$$

$$
\begin{gathered}
P(x)(c_1y_1+c_2y_2)''+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+R(x)(c_1y_1+c_2y_2)=\\
P(x)(c_1y_1''+c_2y_2'')+Q(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+R(x)(c_1y_1+c_2y_2)=\\
c_1\underbrace{(P(x)y_1''+Q(x)y_1'+R(x)y_1)}_{=0,\text{ mert } y_1 \text{ megoldás}}+c_2\underbrace{(P(x)y_2''+Q(x)y_2'+R(x)y_2)}_{=0,\text{ mert } y_2 \text{ megoldás}}=\\
c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0.
\end{gathered}
$$

Ezzel beláttuk, hogy $y = c_1y_1 + c_2y_2$ szintén megoldása a (2) egyenletnek. ∎

Most felsoroljuk az 1. Tétel néhány azonnali következményét, amelyek a homogén lineáris egyenletre vonatkoznak.
1. A (2) egyenlet bármely két megoldásának $y_1 + y_2$ összege szintén megoldás. (Legyen ugyanis az előbbiekben $c_1 = 1$ és $c_2 = 1$.)
2. A (2) egyenlet bármely y_1 megoldásának ky_1 konstansszorosa is megoldás. (Legyen ugyanis $c_1 = k$ és $c_2 = 0$.)
3. A (2) egyenletnek mindig megoldása az $y(x) \equiv 0$ **triviális megoldás**. (Legyen ugyanis $c_1 = c_2 = 0$.)

A homogén lineáris egyenletekre vonatkozó másik alapvető eredmény az egyenlet **általános megoldásáról** szól: létezik az egyenletnek két megoldása, y_1 és y_2, hogy az egyenlet összes többi megoldása megkapható e két megoldás alkalmas lineáris kombinációjaként, vagyis a c_1 és c_2 konstansok alkalmas megválasztásával. Az itteni y_1 és y_2 megoldások azonban nem lehetnek tetszőlegesek, fenn kell állnia ugyanis annak, hogy ők **lineárisan függetlenek**, azaz y_1 és y_2 egyike sem lehet a másik konstansszorosa. Például az $f(x) = e^x$ és $g(x) = xe^x$ függvények lineárisan függetlenek, míg az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 7x^2$ függvények nem (ezért őket lineárisan összefüggőnek hívjuk). Az alábbi, lineáris függetlenségről szóló tételt itt nem bizonyítjuk be, csak kimondjuk.

2. TÉTEL Ha P, Q és R folytonosak az I intervallumban és $P(x)$ sehol sem nulla I-ben, akkor a (2) homogén lineáris egyenletnek létezik két lineárisan független y_1 és y_2 megoldása az I intervallumon. Fennáll továbbá, hogy ha y_1 és y_2 *tetszőleges* lineárisan független megoldásai a (2) egyenletnek, akkor az egyenlet általános megoldása előáll

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

alakban, ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.

Most azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy hogyan találhatunk két lineárisan független megoldást abban a speciális esetben, ha a (2) egyenletben a P, Q és R függvények konstans függvények.

1.1. Állandó együtthatós homogén egyenletek

Tegyük fel, hogy a megoldandó egyenletünk az alábbi alakú

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

ahol a, b és c adott állandók. A (3) egyenlet megoldásához olyan függvényt keresünk, amelyet konstanssal megszorozva, majd hozzáadva első deriváltjának konstansszorosát, végül második deriváltjának konstansszorosát is, az összeg nulla. Egy ilyen típusú függvény az $y = e^{rx}$ alakú exponenciális függvény, ahol r valamilyen állandó. Ebből kétszeri deriválással kapjuk, hogy $y' = re^{rx}$ és $y'' = r^2e^{rx}$, melyek mindketten az eredeti exponenciális függvény konstansszorosai. Behelyettesítve ezeket a (3) egyenletbe azt nyerjük, hogy

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Mivel az exponenciális függvény sehol sem nulla értékű, osszuk le ez utóbbi egyenletet e^{rx}-szel. Beláttuk tehát, hogy $y = e^{rx}$ pontosan akkor megoldása a (3) egyenletnek, ha

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0.} \tag{4}$$

A (4) egyenletet az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet **karakterisztikus egyenletének** nevezzük. Figyeljük meg, hogy a karakterisztikus egyenlet r-ben egy közönséges másodfokú egyenlet, melynek két gyöke

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $b^2 - 4ac$ diszkrimináns előjelétől függően három esetet különböztetünk meg.

1. eset: $b^2 - 4ac > 0$**.** Ilyenkor a karakterisztikus egyenletnek r_1 és r_2 két különböző valós gyöke, tehát $y_1 = e^{r_1x}$ és $y_2 = e^{r_2x}$ a (3) egyenletnek két lineárisan független megoldása (hiszen e^{r_2x} nem konstansszorosa e^{r_1x}-nek, lásd a 61. feladatot). A 2. Tétel alapján így beláttuk az alábbit.

3. TÉTEL Ha r_1 és r_2 az $ar^2 + br + c = 0$ karakterisztikus egyenlet két különböző valós gyöke, akkor

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

adja meg az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

1. PÉLDA Adjuk meg az

$$y'' - y' - 6y = 0$$

egyenlet általános megoldását.

Megoldás Az $y = e^{rx}$ helyettesítéssel a differenciálegyenletből az

$$r^2 - r - 6 = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melyet

$$(r-3)(r+2) = 0$$

alakban is felírhatunk. Ennek két különböző valós gyöke van, $r_1 = 3$ és $r_2 = -2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}. \quad \blacksquare$$

2. eset: $b^2 - 4ac = 0$. Ekkor $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. A jelölés egyszerűsítése érdekében legyen $r = -\frac{b}{2a}$. A differenciálegyenlet egyik megoldása most $y_1 = e^{rx}$, ahol $2ar + b = 0$. Mivel azonban e^{rx} konstansszorosa nem adna lineárisan független másik megoldást, próbálkozzunk azzal, hogy *függvénnyel* szorzunk. A legegyszerűbb ilyen függvény az $u(x) = x$, nézzük meg tehát, vajon $y_2 = xe^{rx}$ megoldás-e. A differenciálegyenletbe behelyettesítve azt nyerjük, hogy

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} =$$
$$(2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} =$$
$$0 \cdot e^{rx} + 0 \cdot xe^{rx} = 0.$$

Az utolsó sorban az első tag azért nulla, mert $r = -\frac{b}{2a}$, a második tag pedig azért, mert r a karakterisztikus egyenlet gyöke. Az $y_1 = e^{rx}$ és $y_2 = xe^{rx}$ függvények lineárisan függetlenek (lásd a 62. feladatot), így a 2. Tétel alapján kimondhatjuk az alábbit.

4. TÉTEL Ha az $ar^2 + br + c = 0$ karakterisztikus egyenletnek r az egyetlen (kétszeres) valós gyöke, akkor

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

adja meg az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

2. PÉLDA Adjuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

egyenlet általános megoldását.

Megoldás A karakterisztikus egyenlet most

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

amely teljes négyzet, azaz

$$(r+2)^2 = 0.$$

Ennek az $r = -2$ kétszeres valós gyöke, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}. \quad \blacksquare$$

3. eset: $b^2 - 4ac < 0$**.** A karakterisztikus egyenletnek ebben az esetben két konjugált komplex gyöke van, $r_1 = \alpha + i\beta$ és $r_2 = \alpha - i\beta$, ahol α és β valós számok, és szokás szerint $i^2 = -1$. (Fennáll egyébként, hogy $\alpha = -\frac{b}{2a}$ és $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.) A két komplex gyök segítségével a differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása felírható, mint

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)),$$

illetve

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)).$$

(A szinuszt és koszinuszt tartalmazó kifejezések az Euler-formulából következnek.) Ezek az y_1 és y_2 megoldások komplex számokat tartalmaznak, noha az eredeti differenciálegyenletben csak valós számok szerepeltek. Az 1. Tételben megfogalmazott szuperpozíciós elv alapján azonban két valós értékű megoldást nyerünk, ha például az

$$y_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

és

$$y_4 = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

választással élünk. Az y_3 és y_4 függvények szintén lineárisan függetlenek (lásd a 63. feladatot), így a 2. Tétel szerint igaz az alábbi állítás.

5. TÉTEL Ha $r_1 = \alpha + i\beta$ és $r_2 = \alpha - i\beta$ az $ar^2 + br + c = 0$ karakterisztikus egyenlet két komplex gyöke, akkor

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$$

adja meg az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

3. PÉLDA Adjuk meg az

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

egyenlet általános megoldását.

Megoldás Az

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

karakterisztikus egyenletnek a két komplex gyöke $r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$, vagyis $r_1 = 2 + i$ és $r_2 = 2 - i$. Ebből $\alpha = 2$ és $\beta = 1$ adódik, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{2x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)). \quad \blacksquare$$

1.2. Kezdeti- és peremérték-problémák

Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldását egyértelműen meghatározza a megoldás valamely pontbeli ismerete. A másodrendű egyenletek általános megoldása azonban két szabad paramétert tartalmaz, így egy konkrét megoldás kiválasztásához két feltétel szükséges. Az egyik lehetőség az, hogy a megoldás és deriváltjának értékét egy adott helyen előírjuk: $y(x_0) = y_0$ és $y'(x_0) = y_1$. Ezeket **kezdeti feltételeknek** hívjuk. Az alábbi idevágó eredményt nem bizonyítjuk be; a tétel az egyértelmű megoldás létezését biztosítja homogén és inhomogén másodrendű lineáris kezdetiérték-problémákra.

6. TÉTEL Ha P, Q, R és G folytonosak egy nyílt I intervallumban, akkor pontosan egy olyan $y(x)$ függvény létezik, amelyik megoldása a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

differenciálegyenletnek az I intervallumon és teljesíti az $y(x_0) = y_0$ és $y'(x_0) = y_1$ kezdeti feltételeket valamely adott $x_0 \in I$ pontban.

Itt fontos hangsúlyoznunk, hogy az y_0 és y_1 valós számok a tételben tetszőleges módon előírhatók. Az alábbi példában egy homogén egyenletet kezdeti feltétellel együtt oldunk meg.

4. PÉLDA Adjuk meg azt a függvényt, amely megoldása az

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték-feladatnak.

Megoldás A karakterisztikus egyenlet

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0,$$

melynek kétszeres gyöke $r = 1$, az általános megoldás tehát

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Ebből deriválással azt kapjuk, hogy

$$y' = c_1 e^x + c_2(x+1)e^x.$$

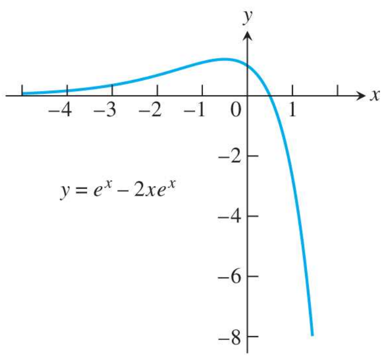
A kezdeti feltételekből felírhatjuk, hogy

$$1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{és} \quad -1 = c_1 + c_2 \cdot 1,$$

melyet megoldva $c_1 = 1$ és $c_2 = -2$ adódik, tehát a kezdetiérték-probléma egyértelmű megoldása az

$$y = e^x - 2xe^x$$

függvény. A megoldást az 1. ábrán rajzoltuk fel. ■



1. ábra A 4. példa megoldásgörbéje.

A másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásában fellépő két tetszőleges állandót a fentiektől eltérően úgy is meghatározhatjuk, ha a megoldásfüggvény értékét az I intervallum *két különböző pontjában* írjuk elő. Ez képlettel azt jelenti, hogy a differenciálegyenletet és az

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{és} \quad y(x_2) = y_2$$

peremfeltételeket tekintjük, ahol $x_1 \neq x_2$ mindketten adott I-beli pontok. (y_1 és y_2 itt is tetszőleges valós számot jelölhet.) A differenciálegyenlet és a peremfeltételek együtt alkotják a **peremérték-problémát**. A 6. tételbeli eredménnyel ellentétben azonban a peremérték-feladatoknak nincs mindig megoldásuk, sőt az is előfordulhat, hogy van megoldás, de az nem egyértelmű (lásd a 65. feladatot). Ezekre a jelenségekre részleteiben itt nem térünk ki; az alábbi példa olyan esetet illusztrál, amikor a megoldás egyértelmű.

5. PÉLDA Oldjuk meg az

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$$

peremérték-feladatot.

Megoldás A karakterisztikus egyenlet

$$r^2 + 4 = 0,$$

melynek komplex gyökei $r_{1,2} = \pm 2i$. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

A peremfeltételek akkor teljesülnek, ha

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Az egyenletrendszer megoldása $c_1 = 0$ és $c_2 = 2$, így a peremérték-probléma egyértelmű megoldása az

$$y = 2\sin(2x)$$

függvény. ■

1.3. Feladatok

Az 1-30. feladatokban a megadott differenciálegyenlet általános megoldásának megkeresése a cél.

1. $y'' - y' - 12y = 0$
2. $3y'' - y' = 0$
3. $y'' + 3y' - 4y = 0$
4. $y'' - 9y = 0$
5. $y'' - 4y = 0$
6. $y'' - 64y = 0$
7. $2y'' - y' - 3y = 0$
8. $9y'' - y = 0$
9. $8y'' - 10y' - 3y = 0$
10. $3y'' - 20y' + 12y = 0$
11. $y'' + 9y = 0$
12. $y'' + 4y' + 5y = 0$
13. $y'' + 25y = 0$
14. $y'' + y = 0$
15. $y'' - 2y' + 5y = 0$
16. $y'' + 16y = 0$
17. $y'' + 2y' + 4y = 0$
18. $y'' - 2y' + 3y = 0$
19. $y'' + 4y' + 9y = 0$
20. $4y'' - 4y' + 13y = 0$
21. $y'' = 0$
22. $y'' + 8y' + 16y = 0$

23. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
24. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
25. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
26. $4\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
27. $4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$
28. $4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$
29. $9\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$
30. $9\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

A 31-40. feladatokban a másodrendű kezdetiérték-feladat egyértelmű megoldását határozzuk meg.

31. $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
32. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
33. $y'' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
34. $12y'' + 5y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
35. $y'' + 8y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
36. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
37. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
38. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 4$
39. $4\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$
40. $9\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$

A 41-55. feladatokban adjuk meg az általános megoldást.

41. $y'' - 2y' - 3y = 0$
42. $6y'' - y' - y = 0$
43. $4y'' + 4y' + y = 0$
44. $9y'' + 12y' + 4y = 0$
45. $4y'' + 20y = 0$
46. $y'' + 2y' + 2y = 0$
47. $25y'' + 10y' + y = 0$
48. $6y'' + 13y' - 5y = 0$
49. $4y'' + 4y' + 5y = 0$
50. $y'' + 4y' + 6y = 0$
51. $16y'' - 24y' + 9y = 0$
52. $6y'' - 5y' - 6y = 0$
53. $9y'' + 24y' + 16y = 0$
54. $4y'' + 16y' + 52y = 0$
55. $6y'' - 5y' - 4y = 0$

Az 56-60. feladatokban oldjuk meg a kezdetiérték-feladatokat.

56. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
57. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
58. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
59. $3y'' + y' - 14y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
60. $4y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0$

61. Bizonyítsuk be, hogy a 3. tételbeli két megoldásfüggvény, e^{r_1x} és e^{r_2x}, lineárisan független.
62. Bizonyítsuk be, hogy a 4. tételbeli két megoldásfüggvény, e^{rx} és xe^{rx}, lineárisan független.
63. Bizonyítsuk be, hogy az 5. tételbeli két megoldásfüggvény, $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ és $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, lineárisan független.
64. Bizonyítsuk be, hogy ha y_1 és y_2 a (2) homogén egyenlet két lineárisan független megoldása, akkor $y_3 = y_1 + y_2$ és $y_4 = y_1 - y_2$ is lineárisan független megoldások.
65. **a.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

peremérték-feladatnak nincs megoldása.
b. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

peremérték-feladatnak végtelen sok megoldása van.
66. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c pozitív állandók, akkor az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

homogén differenciálegyenlet minden megoldása $x \to +\infty$ esetén 0-hoz tart.

2. Inhomogén lineáris egyenletek

Ebben a részben két módszert ismertetünk, melyekkel állandó együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenleteket oldhatunk meg. Az egyik módszer neve a *próbafüggvény módszere* (más néven *határozatlan együtthatók módszere*), a másiké pedig az *állandók variálása*. Mindenekelőtt tekintsük át, hogyan néz ki egy inhomogén egyenlet megoldásának szerkezete.

2.1. Az általános megoldás alakja

Tegyük fel, hogy megoldandó az

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{5}$$

inhomogén egyenlet, ahol a, b és c adott állandók és G egy adott folytonos függvény egy I nyílt intervallumon. Jelölje $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ a fenti inhomogén differenciálegyenlethez tartozó

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6}$$

homogén egyenlet *általános* megoldását. (Ez utóbbi egyenlettípussal az 1. fejezetben foglalkoztunk.) Most tegyük fel, hogy valahogy találtunk egy y_p függvényt, amelyik az (5) inhomogén egyenlet egy megoldása. (Bármelyik ilyen függvényt az inhomogén egyenlet *partikuláris megoldásának* hívunk.) Ekkor az

$$y = y_h + y_p \tag{7}$$

összeg szintén megoldása az (5) inhomogén egyenletnek, hiszen

$$a(y_h + y_p)'' + b(y_h + y_p)' + c(y_h + y_p) =$$

$$(ay_h'' + by_h' + cy_h) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) =$$

(most felhasználjuk, hogy y_h a (6) egyenlet, míg y_p az (5) egyenlet megoldása)

$$0 + G(x) = G(x).$$

Másrészt, ha $y = y(x)$ az (5) inhomogén egyenlet általános megoldása, akkor y szükségképpen olyan alakú, mint ahogy azt a (7) képlet mondja. Ez utóbbi állítás bizonyítása az alábbi észrevételen múlik. Ha egy tetszőleges y_p függvény megoldása az (5) egyenletnek, akkor

$$a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) =$$

$$(ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) =$$
$$G(x) - G(x) = 0,$$

ez pedig pont azt jelenti, hogy $y_h = y - y_p$ az (5) homogén egyenlet általános megoldása. Ezzel az alábbi tételt láttuk be.

7. TÉTEL Az (5) inhomogén egyenlet $y = y(x)$ általános megoldása

$$y = y_h + y_p$$

alakú, ahol y_h a (6) **homogén** egyenlet **általános** megoldása, míg y_p az eredeti (5) **inhomogén** egyenlet egy tetszőleges (**partikuláris**) megoldása.

2.2. A próbafüggvény módszere

A próbafüggvény módszere azokban a speciális esetekben használható az (5) inhomogén egyenlet egy y_p partikuláris megoldásának megkeresésére, amikor a jobboldali $G(x)$ függvény olyan tagok összege, melyek mindegyike egy $p(x)$ polinom, egy exponenciális függvény és egy szinusz vagy egy koszinusz szorzataként áll elő. Más szavakkal $G(x)$ most az alábbi alakú tagok összege lehet:

$$p_1(x)e^{rx}, \quad p_2(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad p_3(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Ilyen $G(x)$ függvények például az $1-x$, e^{2x}, xe^x, $\cos(x)$, vagy az $5e^x - \sin(2x)$. (Figyeljük meg, hogy lényegében ezen függvények alkotják az első-, másod- vagy magasabb rendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásait.) A próbafüggvénymódszer részleteit a következő példákon keresztül illusztráljuk.

1. PÉLDA Oldjuk meg az

$$y'' - 2y' - 3y = 1 - x^2$$

inhomogén differenciálegyenletet.

Megoldás Az egyenlethez tartozó $y'' - 2y' - 3y = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

melynek két megoldása $r_1 = -1$ és $r_2 = 3$. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő $G(x) = 1 - x^2$ függvény most másodfokú polinom. Célszerű feltételezésnek látszik, hogy az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása is másodfokú polinom, hiszen ha y másodfokú polinom, akkor $y'' - 2y' - 3y = 0$ is másodfokú polinom. Az y_p partikuláris megoldást tehát

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

alakban próbáljuk megkeresni. Ehhez már csak az ismeretlen A, B és C együtthatókat kell megtaláljuk. (Innen ered a módszer másik neve — a határozatlan együtthatók módszere.) Ezt az y_p kifejezést és deriváltjait az eredeti inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve a

$$2A - 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2$$

egyenletet kapjuk. A bal oldalt x hatványai szerint átrendezve, és hasonlóképpen, a jobb oldalt is csökkenő x-hatványok szerint felírva azt nyerjük, hogy

$$(-3A)x^2 + (-4A - 3B)x + (2A - 2B - 3C) = (-1)x^2 + 1.$$

Itt az A, B és C számokat úgy kell meghatározzuk, hogy a fenti egyenlőség minden x esetén fennálljon. Ez csak úgy lehet, ha a bal oldali polinom tagonként azonos a jobb oldali polinommal; ebből az egymásnak megfelelő x-hatványok egyenlőségét felírva a

$$-3A = -1, \quad -4A - 3B = 0, \quad 2A - 2B - 3C = 1$$

feltételeket kapjuk. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $A = 1/3$, $B = -4/9$ és $C = 5/27$. Innen megkapjuk az y_p függvényt, mint

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$

A 7. tétel szerint az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldása az alábbi:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}. \quad \blacksquare$$

2. PÉLDA Adjuk meg az $y'' - y' = 2\sin(x)$ egyenlet egy partikuláris megoldását.

Megoldás Keressük a partikuláris megoldást

$$y_p = A\sin(x)$$

alakban. Ezt és a deriváltakat az egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy A-nak a

$$-A\sin(x) + A\cos(x) = 2\sin(x)$$

egyenletet kell teljesítenie minden x-re. Ám a fenti egyenlőség az $x = 0$ helyen az $A = 0$ kijelentésbe menne át, ami nyilván nem lehetséges. Ez azt jelenti, hogy az inhomogén differenciálegyenletnek nincs $A\sin(x)$ alakú megoldása.

Megmutatjuk, hogy van viszont

$$y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$$

alakú megoldás. Ezen új próbafüggvényünk megfelelő deriváltjait az egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$-A\sin(x) - B\cos(x) - (A\cos(x) - B\sin(x)) = 2\sin(x),$$

vagyis

$$(B - A)\sin(x) + (A + B)\cos(x) = 2\sin(x).$$

Ez utóbbinak minden x esetén fenn kell állnia. Ez biztosan teljesül, ha a bal oldalon a szinusz együtthatója 2, míg a koszinuszé 0:

$$B - A = 2 \quad \text{és} \quad A + B = 0,$$

melyből $A = -1$ és $B = 1$. Egy partikuláris megoldás tehát az

$$y_p = \cos(x) - \sin(x)$$

függvény. $\blacksquare$

3. PÉLDA Adjuk meg az $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$ egyenlet egy partikuláris megoldását.

Megoldás Keressük a partikuláris megoldást

$$y_p = Ae^x$$

alakban. Ezt az egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x,$$

azaz

$$0 = 5e^x,$$

ám az exponenciális függvény sehol sem nulla. A próbafüggvényünk most azért nem volt a jó alakú, mert az $y = e^x$ függvény az

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

homogén egyenlet megoldása: a karakterisztikus polinom $r^2 - 3r + 2 = 0$, melynek gyökei $r_1 = 1$ és $r_2 = 2$. A homogén egyenlet általános megoldása tehát $c_1e^x + c_2e^{2x}$. A $c_1 = A$, $c_2 = 0$ választás azt mutatja, hogy a bal oldal szükségképpen nullává válik, ha y helyére Ae^x alakú függvényt helyettesítünk.

Ebben a helyzetben a helyes alakú próbafüggvényt egy extra x szorzó hozzávételével nyerjük, vagyis

$$y_p = Axe^x$$

alakban keressük a partikuláris megoldást. A differenciálegyenletbe visszahelyettesítés után ebből azt kapjuk, hogy

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 3(Axe^x + Ae^x) + 2Axe^x = 5e^x,$$

azaz

$$-Ae^x = 5e^x.$$

Ennek megoldása $A = -5$, mely alapján egy partikuláris megoldás

$$y_p = -5xe^x. \quad \blacksquare$$

4. PÉLDA Keressük meg az $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ egyenlet egy partikuláris megoldását.

Megoldás A homogén egyenlet karakterisztikus polinomja

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0,$$

melynek $r_{1,2} = 3$ kétszeres gyöke. Az y_p partikuláris megoldás tehát most biztosan nem található meg sem Ae^{3x}, sem Axe^{3x} alakban, mert ezek mindketten a homogén egyenlet megoldásai. Az ötlet ilyenkor az, hogy tovább növeljük x kitevőjét a próbafüggvényben, vagyis próbáljuk meg a megoldást

$$y_p = Ax^2e^x$$

alakban megtalálni. Az inhomogén egyenletbe ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}) - 6(3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x},$$

vagyis

$$2Ae^{3x} = e^{3x}.$$

Innen $A = 1/2$, egy partikuláris megoldás tehát

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{3x}. \quad \blacksquare$$

Azokban az esetekben, amikor az (5) egyenletbeli $G(x)$ függvény több tag összege, a linearitás miatt a próbafüggvényt is összeg alakban kereshetjük meg: $G(x)$ minden tagjához tartozni fog egy megfelelő tag a próbafüggvényben.

5. PÉLDA Keressük meg az $y'' - y' = 5e^x - \sin(2x)$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás A homogén egyenlet karakterisztikus polinomja

$$r^2 - r = 0,$$

melynek $r_1 = 1$ és $r_2 = 0$ a két gyöke. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y_h = c_1e^x + c_2.$$

Az y_p partikuláris megoldás próbafüggvényének felírásához figyeljük meg, hogy a jobb oldalon álló $5e^x - \sin(2x)$ kifejezés két tagból áll, a próbafüggvényt is célszerű tehát kéttagú összeg alakban felírni.

Mivel c_1e^x tetszőleges c_1 állandó esetén a homogén egyenlet egyik megoldása, a próbafüggvény első tagja Ae^x helyett legyen Axe^x, vagyis a teljes próbafüggvényünk legyen az alábbi:

$$y_p = Axe^x + B\cos(2x) + C\sin(2x).$$

A differenciálegyenletbe visszahelyettesítés után a deriválásokat elvégezve azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}&(Axe^x + 2Ae^x - 4B\cos(2x) - 4C\sin(2x))\\ &-(Axe^x + Ae^x - 2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)) = 5e^x - \sin(2x),\end{aligned}$$

azaz

$$Ae^x - (4B + 2C)\cos(2x) + (2B - 4C)\sin(2x) = 5e^x - \sin(2x).$$

Az egyenlőség fennáll, ha az

$$A = 5, \quad 4B + 2C = 0, \quad 2B - 4C = 1$$

egyenletek egyszerre teljesülnek, melyből $A = 5$, $B = -1/10$ és $C = 1/5$ adódik. Egy partikuláris megoldás tehát

$$y_p = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1e^x + c_2 + 5xe^x - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x). \quad ■$$

A választandó próbafüggvények tipikus alakját tartalmazza az alábbi táblázat.

1. táblázat A próbafüggvény módszere az $ay'' + by' + cy = G(x)$ alakú inhomogén egyenlet y_p partikuláris megoldásának megkeresésére

Ha $G(x)$-ben előfordul konstansszor az alábbi kifejezés...	**... és ha ...**	**... akkor ezt a tagot is vegyük bele az y_p próbafüggvénybe:**
e^{rx}	r nem gyöke a karakterisztikus polinomnak	Ae^{rx}
	r egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak	Axe^{rx}
	r kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak	Ax^2e^{rx}
$\sin(kx)$, $\cos(kx)$	$k \cdot i$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak (ahol $i^2 = -1$)	$B\cos(kx) + C\sin(kx)$
$px^2 + qx + m$	a 0 nem gyöke a karakterisztikus polinomnak	$Dx^2 + Ex + F$
	a 0 egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	a 0 kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

2.3. A két állandó variálásának módszere

Ezzel az általános módszerrel az (5) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását mindig meg tudjuk találni, feltéve, hogy a homogén egyenlet általános megoldása ismert. Bebizonyítjuk, hogy ha $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ a homogén egyenlet általános megoldása, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása mindig előáll $y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ alakban: az y_h-beli c_1

és c_2 állandókat tehát „megvariáltuk", mert helyettük y_p-ben a $v_1(x)$ és $v_2(x)$ függvényeket írtuk. Itt feladat a $v_1(x)$ és $v_2(x)$ függvénypár megtalálása.

A megadott y_p kifejezésnek az eredeti (5) egyenletet ki kell elégítenie, ez egyelőre egy feltétel. Másik feltételként azt követeljük meg, hogy

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \tag{8}$$

legyen. Noha ez utóbbi egyenlőség önkényesnek tűnhet, azt állítjuk, hogy a fenti két feltételből a v_1 és v_2 függvények (additív állandótól eltekintve) egyértelműen meghatározhatók.

Ehhez először számítsuk ki az y_p függvény deriváltjait:

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2,$$

$$y_p' = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2' = v_1y_1' + v_2y_2',$$
$$y_p'' = v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2',$$

ahol a (8) feltételt is figyelembe vettük. Elvégezve most az (5) egyenletben az $y = y_p$ helyettesítést, a fentiek alapján az alábbit nyerjük:

$$v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x).$$

Az első két zárójelben lévő összeg nulla, mert y_1 és y_2 a (6) homogén egyenlet megoldása. Az (5) inhomogén egyenlet tehát teljesül, ha a (8) feltételen kívül azt is megköveteljük, hogy

$$a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x) \tag{9}$$

legyen.

Tekintsük tehát a (8) és (9) egyenletekből álló

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$$

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{G(x)}{a}$$

lineáris egyenletrendszert a v_1' és v_2' függvényekre: ennek a megoldását például a lineáris algebrából ismert Cramer-szabállyal egyszerűen felírhatjuk determinánsok segítségével. Ezt majd a példákban illusztráljuk.

Ha tehát a v_1' és v_2' deriváltfüggvények rendelkezésre állnak, a $v_1 = v_1(x)$ és $v_2 = v_2(x)$ függvényeket integrálással kapjuk meg. A most bemutatott módszert az alábbi lépésekben foglalhatjuk össze.

A két állandó variálásának módszere Az

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

alakú inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának megkereséséhez felhasználjuk a (8) és (9) összefüggéseket. (Ezeket nem kell újra levezetni.) A megoldás menete a következő.

1. Az $ay'' + by' + cy = 0$ homogén egyenlet megoldásával megkeressük az y_1 és y_2 függvényeket.
2. A

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$$
$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{G(x)}{a}$$

lineáris egyenletrendszerből meghatározzuk a v_1' és v_2' deriváltfüggvényeket.
3. Ebből integrálással meghatározzuk a $v_1 = v_1(x)$ és $v_2 = v_2(x)$ függvényeket.
4. Az (5) inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2.$$

6. PÉLDA Keressük meg az $y'' + y = \mathrm{tg}(x)$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás Az

$$y'' + y = 0$$

homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1\cos(x) + c_2\sin(x).$$

A (8) és (9) egyenlőségekben tehát $y_1(x) = \cos(x)$ és $y_2(x) = \sin(x)$ egy lehetséges választás, így

$$v_1'\cos(x) + v_2'\sin(x) = 0$$
$$-v_1'\sin(x) + v_2'\cos(x) = \mathrm{tg}(x),$$

mert most $a = 1$. Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \mathrm{tg}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\mathrm{tg}(x)\sin(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)}.$$

Hasonlóan

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \mathrm{tg}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \sin(x).$$

Integráljuk most a v_1' és v_2' függvényeket:

$$v_1(x) = \int \frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)} dx =$$

$$-\int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)} dx = -\int \frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) dx.$$

Itt az $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$ integrált a jól ismert $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel számoljuk ki:

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt =$$

$$\int \frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t} dt = \ln|t+1| - \ln|1-t| =$$

$$\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| - \ln\left|1 - \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$v_1(x) = -\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + \ln\left|1 - \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \sin(x).$$

Nyilván

$$v_2(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x).$$

Figyeljük meg, hogy az integrációs konstansokat itt nyugodtan figyelmen kívül hagyhatjuk, hiszen most *partikuláris* megoldást keresünk. (Egyébként, ha a v_1 és v_2 függvényekben az integrációs konstansokat mégis kiírnánk, akkor semmi újat nem kapnánk: egyszerűen láthatjuk, hogy azokat beleolvaszthatnánk a végeredményben szereplő y függvény c_1 és c_2 konstansába.)

A fenti összefoglaló táblázat 4. lépése alapján tehát azt nyerjük, hogy

$$y_p = \left(\ln\left|\frac{1-\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right| + \sin(x)\right)\cos(x) + (-\cos(x))\sin(x) =$$

$$\cos(x)\ln\left|\frac{1-\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|.$$

Az általános megoldás tehát

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \cos(x)\ln\left|\frac{1-\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|. \quad \blacksquare$$

7. PÉLDA Oldjuk meg az $y'' + y' - 2y = xe^x$ inhomogén egyenletet.

Megoldás A homogén egyenlet karakterisztikus polinomja

$$r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) = 0,$$

így a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Mivel most ismét $a = 1$, így a (8) és (9) egyenletek az

$$v_1' e^{-2x} + v_2' e^x = 0$$

$$-2v_1' e^{-2x} + v_2' e^x = xe^x$$

alakot öltik.

A lineáris egyenletrendszer megoldása

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{3x},$$

valamint

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{xe^{-x}}{3e^{-x}} = \frac{x}{3}.$$

Integráljuk most a v_1' és v_2' függvényeket. A v_1 függvény esetén használjunk parciális integrálást:

$$v_1(x) = \int -\frac{1}{3}xe^{3x}dx =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx\right) =$$

$$\frac{1}{27}(1-3x)e^{3x}.$$

Másrészt

$$v_2(x) = \int \frac{x}{3}dx = \frac{x^2}{6}dx.$$

Így

$$y_p = \frac{(1-3x)e^{3x}}{27} \cdot e^{-2x} + \frac{x^2}{6} \cdot e^x =$$

$$\frac{1}{27}e^x - \frac{1}{9}xe^x + \frac{1}{6}x^2e^x.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{9} x e^x + \frac{1}{6} x^2 e^x,$$

ahol az y_p-ben szereplő $\frac{1}{27} e^x$ tagot az egyszerűség kedvéért beleolvasztottuk a $c_2 e^x$-es tagba. ■

2.4. Feladatok

Az 1-16. feladatokban megadott differenciálegyenleteket a próbafüggvény módszerével oldjuk meg.

1. $y'' - 3y' - 10y = -3$
2. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3$
3. $y'' - y' = \sin(x)$
4. $y'' + 2y' + y = x^2$
5. $y'' + y = \cos(3x)$
6. $y'' + y = e^{2x}$
7. $y'' - y' - 2y = 20 \cos(x)$
8. $y'' + y = 2x + 3e^x$
9. $y'' - y = e^x + x^2$
10. $y'' + 2y' + y = 6 \sin(2x)$
11. $y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7 \cos(x)$
12. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x$
13. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 15x^2$
14. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -8x + 3$
15. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = e^{3x} - 12x$
16. $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} = 42x^2 + 5x + 1$

A 17-28. feladatokban megadott differenciálegyenleteket a két állandó variálásának módszerével oldjuk meg.

17. $y'' + y = x$
18. $y'' + y = \mathrm{tg}(x), \quad \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
19. $y'' + y = \sin(x)$
20. $y'' + 2y' + y = e^x$
21. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
22. $y'' - y = x$
23. $y'' - y = e^x$
24. $y'' - y = \sin(x)$
25. $y'' + 4y' + 5y = 10$
26. $y'' - y' = 2^x$
27. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
28. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x \cos(x)$, ha $x > 0$

A 29-32. feladatokban megadtuk az y_p partikuláris megoldás paraméteres alakját. Határozzuk meg ezeket a paramétereket és oldjuk meg a differenciálegyenletet.

29. $y'' - 5y' = xe^{5x}, \quad y_p = Ax^2e^{5x} + Bxe^{5x}$
30. $y'' - y' = \cos(x) + \sin(x), \quad y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$
31. $y'' + y = 2\cos(x) + \sin(x), \quad y_p = Ax\cos(x) + Bx\sin(x)$
32. $y'' + y' - 2y = xe^x, \quad y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$

A 33-36. feladatokban oldjuk meg az adott differenciálegyenleteket **(a)** a két állandó variálásának módszerével és **(b)** a próbafüggvény módszerével is.

33. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}$
34. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x}$
35. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = e^x + 4$
36. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} = 9e^{9x}$

A 37-46. feladatokban oldjuk meg a megadott differenciálegyenleteket. Bizonyos egyenleteket a próbafüggvény módszerével is meg lehet oldani, másokat azonban nem.

37. $y'' + y = \mathrm{ctg}(x), \quad \text{ha } 0 < x < \pi$
38. $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \text{ha } 0 < x < \pi$
39. $y'' - 8y' = e^{8x}$
40. $y'' + 4y = \sin(x)$
41. $y'' - y' = x^3$
42. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
43. $y'' + 2y' = x^2 - e^x$
44. $y'' + 9y = 9x - \cos(x)$
45. $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{tg}(x), \quad \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
46. $y'' - 3y' + 2y = e^x - e^{2x}$

A próbafüggvény módszerével bizonyos elsőrendű egyenleteket is meg lehet oldani. Oldjuk meg a 47-50. feladatokat ezzel a módszerrel.

47. $y' - 3y = e^x$
48. $y' - 4y = x$
49. $y' - 3y = 5e^{3x}$
50. $y' + y = \sin(x)$

A megadott kezdeti feltételek mellett oldjuk meg az 51. és 52. feladatokat.

51. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ és } y(0) = y'(0) = 1$
52. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{2x}, \quad \text{ha } y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{2}{5}$

Az 53-58. feladatokban megadott y_p függvényről bizonyítsuk be, hogy az a feladatban szereplő differenciálegyenlet partikuláris megoldása. Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását, majd az integrációs állandók alkalmas megválasztásával az adott kezdeti feltételt kielégítő egyértelmű megoldást is.

53. $y'' + y' = x, \quad y_p = \frac{x^2}{2} - x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$
54. $y'' + y = x, \quad y_p = 2\sin(x) + x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0$
55. $\frac{1}{2}y'' + y' + y = 4e^x(\cos(x) - \sin(x)), \quad y_p = 2e^x\cos(x), \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1$
56. $y'' - y' - 2y = 1 - 2x, \quad y_p = x - 1, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1$
57. $y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y_p = x^2e^x, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$
58. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, ha $x > 0, \quad y_p = xe^x\ln(x), \quad y(1) = e,\, y'(1) = 0$

Az 59. és 60. feladatokban megadtuk az ott szereplő függvényegyütthatós inhomogén differenciálegyenlet homogén részének két lineárisan független y_1 és y_2 megoldását. A két állandó variálásával adjuk meg az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását. Mindkét példában legyen az értelmezési tartomány $x > 0$.

59. $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y_1 = \frac{1}{x^2},\, y_2 = x$
60. $x^2y'' + xy' - y = x, \quad y_1 = \frac{1}{x},\, y_2 = x$

3. Alkalmazások

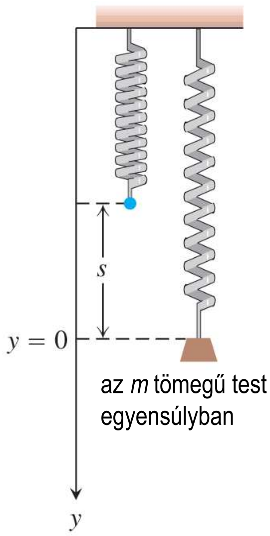
Ebben a részben a másodrendű differenciálegyenletek elméletét alkalmazzuk rugók rezgéseinek leírására és áramkörök vizsgálatára.

Rezgések

Egy rugó felső végét a 2. ábrának megfelelően rögzítettük, majd egy m tömegű testet a rugóra akasztunk. A rugó s egységgel megnyúlik, majd egyensúlyba kerül. A Hooke-törvény szerint a rugóerő ks, ahol k a rugóállandó. A gravitáció mg erővel húzza a testet, így az egyensúly feltétele az, hogy

$$ks = mg. \tag{10}$$

Tegyük fel, hogy a testet y_0 egységgel az egyensúlyi helyzet alá húzzuk, majd elengedjük. A test mozgását szeretnénk tanulmányozni, vagyis tömegközéppontjának függőleges kitérését vizsgálni az idő függvényében.



2. ábra Az m tömegű test a rugót s egységnyire megnyújtja és az $y = 0$ helyzetben egyensúlyban van.

Jelölje $y(t)$ a test elmozdulását az $y = 0$ egyensúlyi helyzettől, t időegységgel a mozgás megkezdése után. Az y függvény előjele pozitív, ha a mozgás lefelé történik. Ekkor a testre ható erők az alábbiak (lásd a 3. ábrán):

$F_p = mg$, a gravitációból fakadó súlyerő,
$F_s = k(s + y)$, a rugó megfeszülése miatti visszahúzó erő,
$F_r = \delta \frac{dy}{dt}$, a súrlódási erő, melynek nagyságát a sebességgel egyenesen arányosnak tételezzük fel.

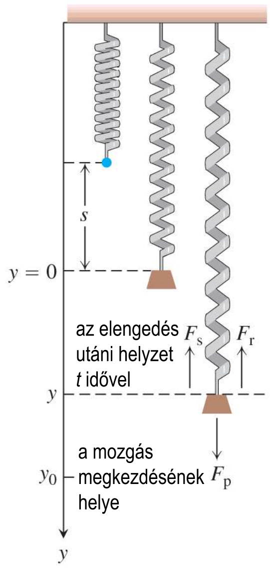
A súrlódási erő a test mozgását akadályozni igyekszik. A fenti három erő eredője $F = F_p - F_s - F_r$. Mivel továbbá Newton második törvénye szerint $F = ma$, így fennáll, hogy

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ks - ky - \delta\frac{dy}{dt}.$$

A (10) egyenlet szerint $mg - ks = 0$, így az iménti egyenletből azt kapjuk, hogy

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = 0, \tag{11}$$

az $y(0) = 0$ és $y'(0) = y_0$ kezdeti feltételekkel. (A felső vessző itt természetesen az idő szerinti deriválást jelenti.)



3. ábra Az F_p súlyerő a testet lefelé húzza, a rugó azonban F_s erővel visszahúzza azt. Szintén felfelé hat az F_r súrlódási erő is. A fel-le rezgésekből álló mozgás kezdőpontja $y = y_0$.

Azt várjuk, hogy a (11)-es egyenlet által leírt mozgás az $y = 0$ egyensúlyi helyzet körüli oszcilláló mozgás lesz, amely idővel elhal a jelenlevő súrlódási erő miatt. A modellből valóban ez lesz kiolvasható. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az m, δ és k paraméterek hogyan befolyásolják a csillapított rezgőmozgást. Azt is látni fogjuk, hogy súrlódás hiányában (vagyis ha $\delta = 0$) a mozgás végtelen ideig oszcilláló volna.

Harmonikus rezgőmozgás

Tegyük fel először, hogy nincs jelen a mozgást akadályozó súrlódási erő, vagyis $\delta = 0$. Ekkor nincs csillapítás. A számítások egyszerűsítése érdekében vezessük be az $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ jelölést. Ekkor a (11)-es másodrendű egyenlet

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = y_0$$

alakban írható fel.
A karakterisztikus egyenlet most

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

melynek két tisztán képzetes konjugált komplex gyöke van, $r = \pm\omega i$. A (11)-es egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \qquad (12)$$

A kezdeti feltételeket is teljesítő konkrét megoldás megtalálásához először számítsuk ki az első deriváltat

$$y' = -c_1\omega \sin(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t),$$

majd helyettesítsük be a $t = 0$ értéket. A c_1 és c_2 konstansokra azt kapjuk, hogy $c_1 = y_0$ és $c_2 = 0$. A (11)-es egyenlet kezdeti feltételeket is kielégítő megoldása tehát

$$y = y_0 \cos(\omega t). \tag{13}$$

A (11)-es egyenlet egyszerű harmonikus rezgést ír le, y_0 amplitúdóval és $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidővel.

Megjegyezzük, hogy a (12)-es általános megoldást trigonometrikus azonosságokkal tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez használjuk fel, hogy

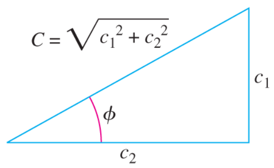
$$\sin(\omega t + \phi) = \cos(\omega t)\sin(\phi) + \sin(\omega t)\cos(\phi).$$

Az azonosság alkalmazásához a 4. ábra alapján írjuk fel c_1 és c_2-t

$$c_1 = C\sin(\phi) \quad \text{és} \quad c_2 = C\cos(\phi)$$

alakban, ahol

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{és} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right).$$



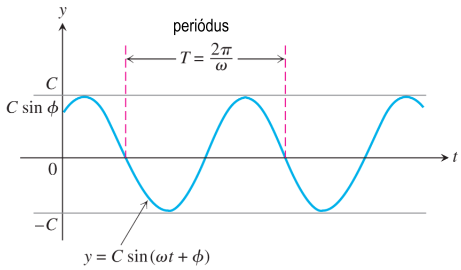
4. ábra $c_1 = C\sin(\phi)$ és $c_2 = C\cos(\phi)$.

Ezekkel a jelölésekkel a (12)-es általános megoldás az

$$y = C\sin(\omega t + \phi) \tag{14}$$

alakban is felírható. (Valójában ahhoz, hogy a (12)-es képlet azonos legyen a (14)-es formulával, bizonyos c_1 és c_2 értékekre esetszétválasztásokat kell bevezetnünk: például ha $c_2 = 0$, akkor a (14)-es képletben szereplő ϕ szög fenti definíciója nyilván értelmetlen, de ekkor legyen $C = c_1$ és $\phi = \frac{\pi}{2}$.) A (14)-es képletben C és ϕ most már két tetszőleges állandónak választható meg a c_1 és c_2 konstansok helyett. A (14)-es képlet harmonikus rezgőmozgást ír le, C amplitúdóval és T periódusidővel. Az $\omega t + \phi$ szöget **fázisszögnek** hívjuk. Ekkor a

ϕ szög a fázisszög kezdeti értéke a $t = 0$ időpillanatban. A harmonikus rezgőmozgás grafikonját az 5. ábrán láthatjuk.



5. ábra Harmonikus rezgőmozgás C amplitúdóval, T periódusidővel és ϕ kezdeti fázissal, lásd a (14)-es egyenletet.

Csillapított rezgőmozgás

Ezek után tegyük fel, hogy a rugóra most súrlódás is hat, azaz $\delta \neq 0$. Elvégezve az $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ és a $2b = \frac{\delta}{m}$ helyettesítést, a (11)-es differenciálegyenletet most

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0 \tag{15}$$

alakban írhatjuk fel. Ennek karakterisztikus polinomja

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0,$$

melynek gyökei $r = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$. Érdemes lesz három esetet megkülönböztetnünk, a b és ω paraméterek nagyságától függően.

1. eset: $b = \omega$**.** A karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke valós és $r = -\omega$. Ekkor a (15)-ös egyenlet általános megoldása

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega t}.$$

Ezt a mozgást a **kritikus csillapítás** esetének hívjuk. Oszcilláció ilyenkor nem lép fel. A mozgást a 6. ábra (a) részén láthatjuk.

2. eset: $b > \omega$**.** A karakterisztikus egyenlet gyökei különböző valós számok: $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ és $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$. A (15)-ös egyenlet általános megoldása

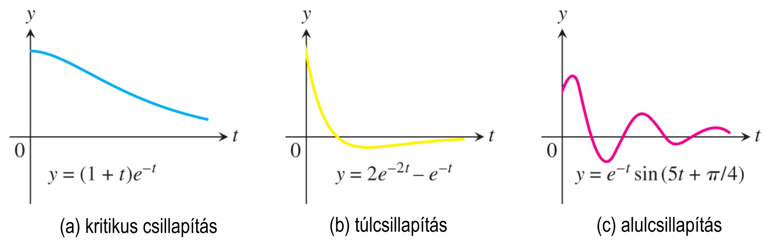
$$y = c_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})t}.$$

A mozgás most sem oszcilláló. Mivel r_1 és r_2 mindketten negatív előjelűek, így y nullához tart az idő előrehaladtával. Ezt a mozgást a 6. ábra (b) részén láthatjuk, melyet **túlcsillapításnak** hívunk.

3. eset: $b < \omega$**.** A karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplex számok: $r = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. A (15)-ös egyenlet általános megoldása

$$y = e^{-bt}\left(c_1 \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - b^2}\right) + c_2 \sin\left(t\sqrt{\omega^2 - b^2}\right)\right).$$

Ezt az esetet az **alulcsillapítás** esetének mondjuk: fokozatosan csillapodó amplitúdójú oszcillációk lépnek fel. Az amplitúdó az e^{-bt} faktor miatt nem állandó, hanem lecseng, viszont – a harmonikus rezgéshez hasonlóan – a periódus állandó, mégpedig $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$. Az idő múlásával tehát a kitérés a nullához tart, a rezgések fokozatosan elhalnak. Figyeljük meg, hogy a $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$ periódus most nagyobb, mint a súrlódásmentes, harmonikus esetben, ahol is $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. Továbbá vegyük azt is észre, hogy minél nagyobb a $b = \frac{\delta}{2m}$ csillapítási tényező, a rezgések annál gyorsabban csökkennek a 0 szint közelébe. Ezt a mozgást a 6. ábra (c) részén tüntettük fel.



6. ábra A súrlódás által ($\delta \neq 0$) okozott csillapított rezgőmozgás három tipikus esete.

A modellünk további kiterjesztését jelentené az, ha a (15)-ös egyenletben egy külső $F(t)$ erőt is figyelembe vennénk. Ez nem más, mint a rendszerre ható külső zavaró hatás, melyet gyakran gerjesztésnek hívunk. Ha például az egyenletünk egy gépjármű felfüggesztését modellezné, akkor e külső erő jelenthetné az úttesten periodikusan előforduló bukkanók vagy kátyúk által a rugóra gyakorolt extra erőket; vagy, egy másik példában jelenthetné a függőhídra mért periodikus széllökések hatását, ha minket csak a híd függőleges kitérése érdekel. Matematikailag a gerjesztett rezgés egyenlete egy

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = F(t) \tag{16}$$

alakú inhomogén másodrendű lineáris egyenlet. Az ilyen rugós rendszerekkel azonban most nem foglalkozunk.

Elektronikus áramkörök

Az elektromosságtanban az alapvető mennyiség a q **töltés** (amely a rezgések esetében a tömeggel analóg fogalom). Elektromos mezőben a töltések áramlása elektromos **áramot** hoz létre, melynek erősségét I-vel jelöljük. Az $I = \frac{dq}{dt}$ formula azt mutatja, hogy az áramerősség a gravitációs mezőben történő mozgások esetében a sebességgel rokon fogalom. Valójában sok hasonlóságot fedezhetünk fel egy test gravitációs térben történő mozgása és az elektromos térben történő töltésvándorlás között, melyet a töltéshordozó elektronok mozgása jelent.

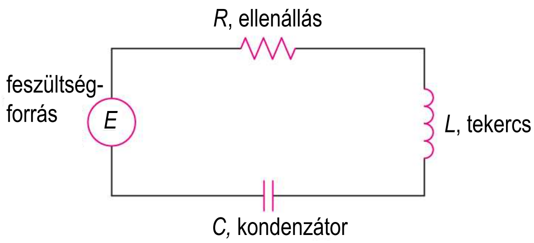
Tekintsük a 7. ábrán megjelenített áramkört, amely négy alkotóelemből áll: feszültségforrásból, ellenállásból, tekercsből és kondenzátorból. Az elektromos töltések áramlására gondolhatunk úgy, mint egy folyadék áramlására, ahol a feszültségforrás egy pumpa, az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor pedig a folyadék áramlását akarják akadályozni. A feszültségforrásra tényleges példa egy elem vagy akkumulátor, amely az áramkört záró kapcsoló aktiválásakor feszültséget hoz létre és az áram folyni kezd. Az ellenállás lehet például egy villanykörte vagy egy háztartási gép. A tekercs induktív ellenállásként van jelen: a mágneses tér akadályozni igyekszik az áram folyását; a kondenzátorban pedig a két fémlap között felépülő elektromos tér akadályozza a töltések mozgását. Az áramköri elemek legfontosabb jellemzőit az alábbi mennyiségekkel mérhetjük:

q: a vezető keresztmetszetén időegység alatt átfolyó töltésmennyiség, mértékegysége a **coulomb**, jele c;

I: az áramerősség, vagyis a töltésváltozás mértéke, $\frac{dq}{dt}$, amelyet az elektronok áramlása okoz a vezető keresztmetszetében, mértékegysége az **amper**, jele A;

E: az elektromos feszültség mértékegysége a **volt**, jele V;

U: a vezető két pontja között mért potenciálkülönbség, szintén **volt**ban mérjük.



7. ábra Egy elektromos áramkör.

Ohm észrevette, hogy az ellenálláson átfolyó I áramerősség hozzávetőlegesen egyenesen arányos az ellenállás két végpontja között mérhető potenciálkülönbséggel (más néven feszültségeséssel). Az arányossági tényezőt $\frac{1}{R}$-rel jelölte és R-et **ellenállásnak** nevezte. Így *Ohm törvénye* kimondja, hogy

$$I = \frac{1}{R}U.$$

Hasonló formulák igazak a tekercsen és a kondenzátoron mérhető feszültségesésre:

$$L\frac{dI}{dt} \quad \text{és} \quad \frac{q}{C},$$

ahol L az **indukciós együttható** és C a **kapacitás** (q pedig a kondenzátor töltése).

Gustav R. Kirchhoff (1824–1887) német fizikus megfigyelése szerint egy zárt áramkörben a feszültségesések összege megegyezik az $E(t)$ betáplált feszültséggel. Képlettel ez azt jelenti, hogy

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = E(t).$$

Mivel $I = \frac{dq}{dt}$, ezért *Kirchhoff törvénye* felírható az

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{17}$$

alakban is. Ez az áramkört modellező másodrendű differenciálegyenlet pont olyan alakú, mint a (16)-os, rezgéseket leíró egyenlet. Mindkét egyenlettípust kezelni tudjuk a 2. fejezetben leírt módszerekkel.

Összefoglalás

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk, hogy milyen analógiákat fedezhetünk fel egy rugóra rögzített test mozgásának leírása és egy áramkör töltött részecskéi áramlásának leírása között.

Állandó együtthatós másodrendű lineáris modellek

Mechanikai rendszer	**Elektronikai rendszer**
$my'' + \delta y' + ky = F(t)$	$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$
y: az elmozdulás	q: a töltés
y': a sebesség	q': az áramerősség
y'': a gyorsulás	q'': az áramerősség változása
m: a tömeg	L: az indukciós együttható
δ: a csillapítási tényező	R: az ellenállás
k: a rugóállandó	$\frac{1}{C}$: ahol C a kapacitás
$F(t)$: a gerjesztőfüggvény	$E(t)$: a feszültségforrás

3.1. Feladatok

Az alábbi táblázatban megadunk néhány megfeleltetést a különböző típusú mértékegységek között, amelyek a feladatokban előfordulnak.

mértékegység	**angolszász**	**SI**
távolság	láb, inch	méter (m)
tömeg	slug	kilogramm (kg)
idő	másodperc	másodperc (s)
erő	font	newton (N)
földi gravitációs gyorsulás (g)	32 láb/s^2	9,81 m/s^2

1. Egy 16 font súlyú testet egy rugó alsó végéhez rögzítünk. A rugó felső vége a mennyezethez csatlakozik, a rugóállandó 1 font/láb. A közegellenállás mértékének számértéke a test pillanatnyi sebességével egyezik meg. A $t = 0$ időpontban mozgásba hozzuk a súlyt, az egyensúlyi helyzet alól 2 lábbal indítva, 2 láb/s lefelé irányuló sebességgel. Írjuk fel a fentieket modellező kezdetiérték-problémát.

2. Egy 8 font súlyú test 4 lábnyira nyújt meg egy rugót. A test-rugó rendszer olyan közegben helyezkedik el, melyben a mozgással szembeni ellenállás számértéke a pillanatnyi sebesség 1,5-szöröse. A testet az egyensúlyi helyzet fölött 2 lábbal, 3 láb/s lefelé irányuló sebességgel hozzuk mozgásba. Írjuk fel a fentieket modellező kezdetiérték-feladatot.

3. Egy 20 font súlyú test lóg egy 18 inch-es rugón, melyet az 6 inch-csel megnyújt. A testet 5 inch-csel lehúzzuk és 5 fonttal még megnöveljük a súlyt, majd v_0 inch/s lefelé irányuló sebességgel elengedjük. Írjuk fel a fentieket modellező kezdetiérték-problémát.

4. Egy 10 font súlyú testet rugóra akasztunk, melyet a test 2 inch-csel megnyújt. A közegellenállás abszolút értékben vett nagysága $20/\sqrt{g}$ font szorozva a láb/s-ben mért v pillanatnyi sebesség nagyságával. Írjuk fel a test-rugó rendszer mozgásegyenletét, ha a testet az egyensúlyi helyzet alá 3 inch-csel lehúzzuk és onnan elengedjük.

5. Egy (nyitott) áramkörben tekercs, ellenállás és kondenzátor van. A kondenzátor kezdeti töltése 2 coulomb. Az áramkör zárásának pillanatában 3 amperes áram lép fel és $E(t) = 20\cos(t)$ volt feszültséget táplálunk a rendszerbe. Az áramkörben az ellenálláson keresztüli feszültségesés 4-szerese a töltés pillanatnyi megváltozásának, a kondenzátoron keresztüli feszültségesés 10-szerese a töltésnek, míg a tekercsen keresztüli feszültségesés 2-szerese a pillanatnyi áramerősségváltozásnak. Írjuk fel az áramkört modellező kezdetiérték-problémát.

6. Sorba kapcsolunk egy 2 henrys tekercset, egy 12 ohmos ellenállást, egy 1/16 farados kondenzátort és egy 300 voltos tápegységet. A kondenzátor kezdeti töltése 0 és az áramerősség is 0. Írjuk fel az áramkört modellező kezdetiérték-problémát.

7. Egy 16 font súlyú testet egy rugó alsó végéhez rögzítünk. A rugó felső vége a mennyezethez csatlakozik, a rugóállandó 1 font/láb. A közegellenállás mértékének számértéke a test pillanatnyi sebességével egyezik meg. A $t = 0$ időpontban mozgásba hozzuk a súlyt, az egyensúlyi helyzet alól 2 lábbal indítva, 2 láb/s lefelé irányuló sebességgel. Döntsük el, hogy π másodperc eltelte után a test az egyensúlyi helyzet alatt vagy fölött helyezkedik-e el és mennyivel.

8. Egy 8 font súlyú test 4 lábnyira nyújt meg egy rugót. A test-rugó rendszer olyan közegben helyezkedik el, melyben a mozgással szembeni ellenállás számértéke a pillanatnyi sebesség 1,5-szöröse. A testet az egyensúlyi helyzet fölött 2 lábbal, 3 láb/s lefelé irányuló sebességgel hozzuk mozgásba. Az egyensúlyi helyzethez képest hol helyezkedik el a test 2 másodperc eltelte után?

9. Egy 20 font súlyú test lóg egy 18 inch-es rugón, melyet az 6 inch-csel megnyújt. A testet 5 inch-csel lehúzzuk és 5 fonttal még megnöveljük a súlyt, majd v_0 inch/s lefelé irányuló sebességgel elengedjük. Írjunk fel egy képletet, amely minden $t \geq 0$ esetén megadja a test helyzetét az egyensúlyi helyzethez képest v_0 függvényében.

10. Egy 1 slug tömegű testet rugóra függesztünk. A rugóállandó $\frac{25}{4}$ font/láb. A testet az egyensúlyi helyzet felett 1 lábbal engedjük el, 3 láb/s lefelé irányuló sebességgel. A közegellenállás mértéke a pillanatnyi sebesség számértékének 3-szorosa. A rendszerre $f(t)$ külső gerjesztő erő hat, de az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f(t)$ azonosan 0. Írjuk fel és oldjuk meg a fentieket modellező kezdetiérték-feladatot. Eredményeinket értelmezzük.

11. Egy 10 font súlyú testet rugóra akasztunk, melyet a test 2 inch-csel megnyújt. A közegellenállás abszolút értékben vett nagysága $40/\sqrt{g}$ font szorozva a láb/s-ben mért v pillanatnyi sebesség nagyságával. Mennyi idő múlva éri el a test először az egyensúlyi helyzetet, ha a testet az egyensúlyi helyzet alá 3 inch-csel lehúzva engedtük el?

12. Egy test 6 lábnyira nyújt meg egy rugót. A testet az egyensúlyi helyzet alatt 2 lábbal, 2 láb/s lefelé irányuló sebességgel hozzuk mozgásba.

a. Mikor tér vissza a test a kiindulási helyzetbe?

b. Mikor éri el mozgásának legmagasabb pontját?

c. Mutassuk meg, hogy a maximális sebesség $2\sqrt{2g+1}$ inch/s.

13. Egy 10 font súlyú test 10 inch-csel nyújt meg egy rugót. A testet az egyensúlyi helyzet alatt 2 lábbal, 4 láb/s kezdeti sebességgel hozzuk mozgásba. Egy ugyanolyan rugóra más tömegű testet akasztunk. Ezt a testet az egyensúlyi helyzete alá húzzuk annyival, mint amennyi az első test mozgásának amplitúdója, majd 2 láb/s kezdeti sebességgel ezt is mozgásba hozzuk. Mekkora a második rugóra akasztott test tömege, ha mozgásának amplitúdója kétszerese az első test amplitúdójának?

14. Egy test 3 inch-csel megnyújt egy rugót, egy másik test pedig 9 inch-csel egy másikat. Mindkét testet a saját egyensúlyi helyzetük alá húzzuk 1 inch-csel, majd egyszerre elengedjük őket. Keressük meg $t = 0$ után azt az első pillanatot, amikor sebességük azonos.

15. Egy 16 font súlyú testet rugóra akasztunk, melyet a test 4 lábbal megnyújt. A testet az egyensúlyi helyzet alá húzzuk 5 lábbal, majd elengedjük. Mekkora v_0 kezdeti sebesség duplázná meg a rezgés amplitúdóját?

16. Egy 8 font súlyú test 3 inch-csel nyújt meg egy rugót. A test-rugó rendszer olyan közegben helyezkedik el, melyben a közegellenállási együttható 2 font·s/láb. A testet az egyensúlyi helyzetből mozgásba hozzuk, 4 inch/s lefelé irányuló sebességgel. Mennyi idő múlva éri el a test az egyensúlyi helyzetet először újra?

17. Egy rugóra függesztett test 2 másodperc periódusú csillapított rezgőmozgást végez. Ha a csillapítási együttható 10 másodperc alatt 90%-kal csökken, mennyi lesz a test gyorsulása abban a pillanatban, amikor a test az egyensúlyi helyzete alatt 3 inch-csel felfelé mozog 2 láb/s sebességgel?

18. Egy 10 font súlyú testet rugóra akasztunk, melyet a test 2 lábbal megnyújt. A testet az egyensúlyi helyzet alá 6 inch-csel lehúzzuk és onnan elengedjük. Mi lesz a mozgás során elért legmagasabb pont? Tegyük fel, hogy a közegellenállás nagysága $10/\sqrt{g}$ font szorozva a láb/s-ben mért pillanatnyi sebesség nagyságával.

19. Egy LRC-körben egy 1/5 henrys tekercs, egy 1 ohmos ellenállás és egy 5/6 farados kondenzátor található. A kezdeti töltés 2 coulomb, a kezdeti áramerősség 4 amper. Adjuk meg a kondenzátor töltését az idő függvényében. Mennyi lesz a kondenzátor töltése hosszú idő múlva?

20. Egy (nyitott) áramkörben tekercs, ellenállás és kondenzátor van. A kondenzátor kezdeti töltése 2 coulomb. Az áramkör zárásának pillanatában 3 amperes áram lép fel, de nem táplálunk külső feszültséget a rendszerbe. Az áramkör három pontjában a feszültségesések számértéke a következőképpen alakul: a kondenzátoron keresztüli feszültségesés 10-szerese a töltésnek, az ellenálláson keresztüli feszültségesés 4-szerese a töltés pillanatnyi megváltozásának, a kondenzátoron keresztüli feszültségesés pedig 2-szerese az áramerősség pillanatnyi megváltozásának. Írjuk fel a kondenzátor kapacitását az idő függvényében.

21. Egy 16 font súlyú test 4 lábbal nyújt meg egy rugót. A test-rugó rendszer olyan közegben helyezkedik el, melyben a közegellenállási együttható 4,5 font·s/láb. A testre $f(t) = 4 + e^{-2t}$ külső erő hat (fontban mérve). A testet az egyensúlyi helyzete alatt 2 lábbal 4 láb/s lefelé irányuló sebességgel mozgásba hozzuk. Írjuk fel a test helyzetét az idő függvényében.

22. Egy 10 kg-os testet rugóra akasztunk. A rugóállandó 140 N/m. A testet az egyensúlyi helyzetéből felfelé 1 m/s-os sebességgel indítjuk el. A testre ható külső erő newtonban $f(t) = 5\sin(t)$. A test viszkózus anyagban rezeg, a közegellenállási tényező 90 N·s/m. Írjuk fel a rendszert modellező kezdetiérték-feladatot, oldjuk meg a differenciálegyenletet és értelmezzük is az eredményt.

23. Egy 2 kg-os testet egy rugó alsó végéhez rögzítünk. A test egyensúlyi helyzetében 1,96 m-esre nyújtja meg a rugót. A közegellenállás nagysága newtonban mérve 4-szerese a m/s-ban mért pillanatnyi sebességnek. A testet az egyensúlyi helyzet alól 2 m-rel indítva, 3 m/s lefelé irányuló kezdősebességgel elindítjuk. Ettől a pillanattól kezdve a rendszerre $f(t) = 20\cos(t)$ newton nagyságú külső erő hat. Döntsük el, hogy π másodperc eltelte után a test az egyensúlyi helyzet alatt vagy fölött helyezkedik-e el és mennyivel.

24. Egy 8 font súlyú test 4 lábnyira nyújt meg egy rugót. A test-rugó rendszer olyan közegben helyezkedik el, melyben a mozgással szembeni ellenállás számértéke a pillanatnyi sebesség 1,5-szöröse. A testre $f(t) = 6 + e^{-t}$ font nagyságú külső erő hat. A testet az egyensúlyi helyzet fölött 2 lábbal, 3 láb/s lefelé irányuló sebességgel hozzuk mozgásba. Az egyensúlyi helyzethez képest hol helyezkedik el a test 2 másodperc eltelte után?

25. Tegyük fel, hogy a korábbi jelölésekkel $L = 10$ henry, $R = 10$ ohm, $C = 1/500$ farad, $E = 100$ volt, $q(0) = 10$ coulomb és $q'(0) = i(0) = 0$. Írjuk fel és oldjuk meg ezt az LRC-kört modellező differenciálegyenletet. Értelmezzük az eredményeket.

26. Egy nyitott áramkörben egy tekercs, egy ellenállás és egy kondenzátor van sorba kapcsolva. A kondenzátor kezdeti töltése 2 coulomb és az áramkör zárásának pillanatában 3 amperes áram lép fel. A rendszerbe $E(t) = 20\cos(t)$ volt külső feszültséget táplálunk. Az áramkörben a feszültségesések számértéke a következőképpen alakul: az ellenálláson keresztüli feszültségesés 4-szerese a töltés pillanatnyi megváltozásának, a kondenzátoron keresztüli feszültségesés 10-szerese a töltésnek, a tekercsen keresztüli feszültségesés pedig 2-szerese az áramerősség pillanatnyi megváltozásának. Írjuk fel a kondenzátor kapacitását az idő függvényében. Adjuk meg a kondenzátor töltését és az áramerősséget a $t = 10$ időpillanatban.

4. Euler-típusú egyenletek

Az 1. fejezetben a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

alakú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletekkel foglalkoztunk és megmutattuk, hogyan kell ezeket megoldani abban az esetben, amikor a P, Q

és R függvények konstansok. Ha azonban ezek az együtthatók nem állandók, akkor *általában* nem lehet az analízisben tanult elemi függvényekkel felírni a megoldást. Ebben a fejezetben azt az – elemi képlettel mégis megoldható – esetet tárgyaljuk, amikor az együtthatók speciális alakú függvények, nevezetesen, ha

$$P(x) = ax^2, \quad Q(x) = bx \quad \text{és} \quad R(x) = c,$$

tetszőlegesen adott a, b és c konstansokkal. Ezt az egyenletosztályt Leonhard Euler tiszteletére **Euler-típusú** egyenleteknek hívjuk, aki megtalálta a megoldási módszerüket. Az Euler-egyenletek a rezgéstanban gyakran fellépő egyenletek.

Az Euler-egyenletek általános megoldása

Tekintsük tehát az

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0 \tag{18}$$

alakú Euler-egyenletet. Vezessük be először a

$$z = \ln(x) \quad \text{és} \quad Y(z) = y(x)$$

új változókat. A láncszabály alapján

$$y'(x) = \frac{d}{dx}Y(z) = \frac{d}{dz}Y(z)\frac{dz}{dx} = Y'(z)\frac{1}{x},$$

illetve

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}\left(Y'(z)\frac{1}{x}\right) =$$

$$\left(Y''(z)\frac{dz}{dx}\right)\frac{1}{x} - Y'(z)\frac{1}{x^2} = Y''(z)\frac{1}{x^2} - Y'(z)\frac{1}{x^2}.$$

Visszahelyettesítve ezeket a deriváltakat a (18)-as egyenlet bal oldalába azt kapjuk, hogy

$$ax^2y'' + bxy' + cy = ax^2\left(Y''(z)\frac{1}{x^2} - Y'(z)\frac{1}{x^2}\right) + bx\left(\frac{1}{x}Y'(z)\right) + cY(z) =$$

$$aY''(z) + (b-a)Y'(z) + cY(z),$$

így a transzformáció után a (18)-as egyenlet az alábbi alakúvá vált:

$$aY''(z) + (b-a)Y'(z) + cY(z) = 0. \tag{19}$$

Ezt az állandó együtthatós egyenletet az 1. fejezet módszereivel meg tudjuk oldani, először megkeresve az

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0 \tag{20}$$

karakterisztikus polinom két gyökét felírjuk az $Y(z)$ függvényt, amelyből viszont a $z = \ln(x)$ helyettesítéssel megkapjuk az $y(x)$ megoldást.

1. PÉLDA Oldjuk meg az $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ egyenletet.

Megoldás Ebben az Euler-egyenletben $a = 1$, $b = 2$ és $c = 2$, így a (20)-as egyenlet most $r^2 + (2-1)r - 2 = 0$, melynek két gyöke $r = -2$ és $r = 1$, így

$$Y(z) = c_1e^{-2z} + c_2e^z.$$

Elvégezve a $z = \ln(x)$ visszahelyettesítést azt kapjuk, hogy az általános megoldás

$$y(x) = c_1e^{-2\ln(x)} + c_2e^{\ln(x)} = c_1x^{-2} + c_2x. \quad \blacksquare$$

2. PÉLDA Oldjuk meg az $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ Euler-egyenletet.

Megoldás Most $a = 1$, $b = -5$ és $c = 9$, így a (20)-as egyenlet most $r^2 - 6r + 9 = 0$, melynek kétszeres gyöke az $r = -3$, így

$$Y(z) = c_1e^{3z} + c_2ze^{3z}.$$

Elvégezve a $z = \ln(x)$ visszahelyettesítést azt kapjuk, hogy az általános megoldás

$$y(x) = c_1e^{3\ln(x)} + c_2\ln(x)e^{3\ln(x)} = c_1x^3 + c_2x^3\ln(x). \quad \blacksquare$$

3. PÉLDA Keressük meg az $x^2y'' - 3xy' + 68y = 0$ egyenlet azon megoldását, amely kielégíti az $y(1) = 0$ és $y'(1) = 1$ kezdeti feltételeket.

Megoldás Itt $a = 1$, $b = -3$ és $c = 68$, így a (20)-as egyenlet most $r^2 - 4r + 68 = 0$. Ennek gyökei $r = 2 + 8i$ és $r = 2 - 8i$, így

$$Y(z) = e^{2z}(c_1\cos(8z) + c_2\sin(8z)).$$

Elvégezve a $z = \ln(x)$ visszahelyettesítést azt kapjuk, hogy az általános megoldás

$$y(x) = e^{2\ln(x)}(c_1\cos(8\ln(x)) + c_2\sin(8\ln(x))).$$

Az első kezdeti feltételből $c_1 = 0$ adódik, így

$$y(x) = c_2x^2\sin(8\ln(x)).$$

A második kezdeti feltételhez először a deriváltat számítsuk ki:

$$y'(x) = c_2(2x\sin(8\ln(x)) + 8x\cos(8\ln(x))),$$

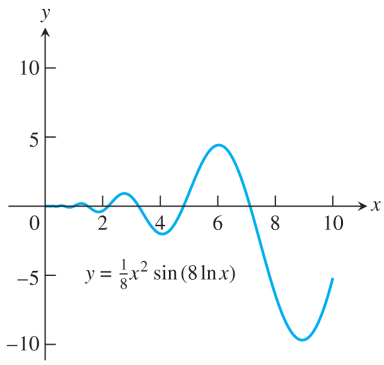
s mivel $y'(1) = 1$, így $c_2 = 1/8$. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás tehát

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2\sin(8\ln(x)).$$

Figyeljük meg, hogy mivel $-1 \leq \sin(8x) \leq 1$, ezért a megoldásra minden $x > 0$ esetén igaz lesz, hogy

$$-\frac{x^2}{8} \leq y(x) \leq \frac{x^2}{8}.$$

A megoldás grafikonját a 8. ábrán látjuk. ■



8. ábra A 3. példa megoldásának grafikonja.

4.1. Feladatok

Az 1-24. feladatokban adjuk meg az Euler-egyenletek általános megoldását. Mindvégig tegyük fel, hogy $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
2. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
3. $x^2y'' - 6y = 0$
4. $x^2y'' + xy' - y = 0$
5. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$
6. $2x^2y'' + 7xy' + 2y = 0$
7. $3x^2y'' + 4xy' = 0$
8. $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$
9. $x^2y'' - xy' + y = 0$
10. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
11. $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
12. $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$
13. $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
14. $x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$
15. $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$
16. $4x^2y'' - 4xy' + 5y = 0$
17. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
18. $x^2y'' - 3xy' + 9y = 0$
19. $x^2y'' + xy' = 0$

20. $x^2y'' + y = 0$
21. $9x^2y'' + 15xy' + y = 0$
22. $16x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$
23. $16x^2y'' + 56xy' + 25y = 0$
24. $4x^2y'' - 16xy' + 25y = 0$

A 25-30. feladatokban oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat.

25. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1$
26. $6x^2y'' + 7xy' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$
27. $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 1$
28. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$
29. $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, y'(1) = 1$
30. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$

5. Hatványsor alakú megoldások

Ebben a fejezetben tovább vizsgáljuk a függvényegyütthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteket. A 4. fejezetben tárgyalt Euler-egyenletek is ebbe az osztályba tartoznak, de meglehetősen speciális alakúak: az együttható x-hatvány kitevője a derivált rendjével kell megegyezzen (azaz x^2 van párban y''-vel, x^1 tartozik y'-hoz és $x^0(= 1)$ y-hoz). Az alábbiakban ennél általánosabb típusokkal fogunk foglalkozni.

A megoldás alapgondolata

Tegyük fel, hogy a másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek van **pozitív konvergenciasugarú, 0-közepű hatványsor** alakú megoldása, azaz keressük az y függvényt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \tag{21}$$

alakban. Ezt a kifejezést helyettesítsük be a differenciálegyenletbe, közben használjuk fel, hogy hatványsort a konvergenciahalmaz belsejében tagonként lehet deriválni. Összehasonlítva az egyenlet két oldalán a megfelelő x-hatványok együtthatóit – a határozatlan együtthatók 2. fejezetben tárgyalt módszeréhez hasonlóan –, a c_0, c_1, c_2, … együtthatókra egy rekurzív összefüggést kapunk, amelyből a c_k számok rendre meghatározhatók.

Az első kidolgozott példában olyan egyenletet oldunk meg hatványsor segítségével, melynek megoldását a korábbi ismereteink alapján már könnyen meg tudjuk adni, ezáltal összehasonlíthatjuk a hatványsoros módszert a korábbi technikákkal.

Megjegyezzük, hogy a hatványsorba fejtés módszere nagyon általános módszer: inhomogén, magasabb rendű, sőt nemlineáris egyenletekre is eredményesen alkalmazható.

1. PÉLDA Hatványsorba fejtéssel oldjuk meg az $y'' + y = 0$ egyenletet.

Megoldás Tegyük fel, hogy az egyenlet általános megoldása

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

alakú. Tagonkénti deriválással azt kapjuk, hogy

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{és} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Helyettesítsük vissza ezeket a differenciálegyenletbe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

A bal oldalt egy közös szummába írva látjuk, hogy egy függvény Taylor-sora a jobb oldalon álló azonosan 0 függvénnyel egyenlő. A Taylor-sorok egyértelműségi tétele alapján ez csak úgy lehet, ha minden x-hatvány együtthatója a bal oldalon 0. Írjuk ezt fel részletesen az alábbi táblázatban.

Az x-hatvány	**és együtthatója**
x^0	$2 \cdot 1 \cdot c_2 + c_0 = 0$ azaz $c_2 = -\frac{1}{2} c_0$
x^1	$3 \cdot 2 \cdot c_3 + c_1 = 0$ azaz $c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_1$
x^2	$4 \cdot 3 \cdot c_4 + c_2 = 0$ azaz $c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} c_2$
x^3	$5 \cdot 4 \cdot c_5 + c_3 = 0$ azaz $c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} c_3$
x^4	$6 \cdot 5 \cdot c_6 + c_4 = 0$ azaz $c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} c_4$
$\vdots$	$\vdots$
x^{n-2}	$n(n-1) c_n + c_{n-2} = 0$ azaz $c_n = -\frac{1}{n(n-1)} c_{n-2}$

A fentiekből láthatjuk, hogy a páros n indexek ($n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) összetartoznak, és szintúgy összetartoznak a páratlan indexek ($n = 2k + 1$). A két esetet nézzük külön-külön.

Páros indexek. Most $n = 2k$, így a hatvány x^{2k-2}. A táblázat alsó sora alapján

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k(2k-1)} c_{2k-2}.$$

Ezt rekurzívan felhasználva azt kapjuk, hogy

$$c_{2k} = \left(-\frac{1}{2k(2k-1)}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(2k-2)(2k-3)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{4 \cdot 3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) c_0 =$$

$$\frac{(-1)^k}{(2k)!}c_0.$$

Páratlan indexek. Most $n = 2k+1$, így a hatvány x^{2k-1}. A táblázat alsó sora alapján

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{(2k+1)\cdot 2k}c_{2k-1},$$

így

$$c_{2k+1} = \left(-\frac{1}{(2k+1)\cdot 2k}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(2k-1)(2k-2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{5\cdot 4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3\cdot 2}\right)c_1 =$$

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}c_1.$$

Írjuk fel y hatványsorát a páros és a páratlan indexek szerint szétbontva és helyettesítsük be az imént nyert együtthatókat:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} =$$

$$c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Vegyük végül észre, hogy az itteni két hatványsor éppen a koszinusz és a szinusz 0-közepű sora. Az $y'' + y = 0$ egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_0\cos(x) + c_1\sin(x). \quad \blacksquare$$

2. PÉLDA Hatványsorba fejtéssel oldjuk meg az $y'' + xy' + y = 0$ egyenletet.

Megoldás Keressük y-t ismét

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

alakban. Tagonkénti deriválással azt kapjuk, hogy

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad \text{és} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Helyettesítsük vissza ezeket a differenciálegyenletbe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Az előző példához hasonlóan a bal oldal most is tagonként 0 kell legyen. Írjuk ezt fel részletesen az alábbi táblázatban.

Az x-hatvány	**és együtthatója**
x^0	$2 \cdot 1 \cdot c_2 + c_0 = 0$ azaz $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$
x^1	$3 \cdot 2 \cdot c_3 + c_1 + c_1 = 0$ azaz $c_3 = -\frac{1}{3}c_1$
x^2	$4 \cdot 3 \cdot c_4 + 2c_2 + c_2 = 0$ azaz $c_4 = -\frac{1}{4}c_2$
x^3	$5 \cdot 4 \cdot c_5 + 3c_3 + c_3 = 0$ azaz $c_5 = -\frac{1}{5}c_3$
x^4	$6 \cdot 5 \cdot c_6 + 4c_4 + c_4 = 0$ azaz $c_6 = -\frac{1}{6}c_4$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0$ azaz $c_n = -\frac{1}{n+2}c_n$

A fentiekből láthatjuk, hogy a páros n indexek összetartoznak, és szintúgy összetartoznak a páratlan indexek.

Páros indexek. Most $n = 2k-2$, így a hatvány x^{2k-2}. A táblázat alsó sora alapján

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k}c_{2k-2}.$$

Ezt rekurzívan felhasználva azt kapjuk, hogy

$$c_{2k} = \left(-\frac{1}{2k}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2k-2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) c_0 =$$

$$\frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)}c_0.$$

Páratlan indexek. Most $n = 2k-1$, így a hatvány x^{2k-1}. A táblázat alsó sora alapján

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}c_{2k-1},$$

így

$$c_{2k+1} = \left(-\frac{1}{2k+1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2k-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) c_1 =$$

$$\frac{(-1)^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}c_1.$$

Írjuk fel y hatványsorát a páros és a páratlan indexek szerint szétbontva és helyettesítsük be az imént nyert együtthatókat:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} =$$

$$c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} x^{2k+1}. \quad \blacksquare$$

3. PÉLDA Adjuk meg az

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0, \quad |x| < 1$$

egyenlet általános megoldását.

Megoldás Vegyük észre, hogy a főegyüttható nulla, ha $x = \pm 1$, így feltesszük, hogy a megoldást az $I = (-1, 1)$ nyílt intervallumon keressük. Legyen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

A behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

azaz

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Az előzőekhez hasonlóan az összevonás után a bal oldalon minden x-hatvány együtthatója 0:

Az x-hatvány	**és együtthatója**
x^0	$2 \cdot 1 \cdot c_2 - 4c_0 = 0$ azaz $c_2 = \frac{4}{2} c_0$
x^1	$3 \cdot 2 \cdot c_3 - 6 \cdot 1 \cdot c_1 - 4c_1 = 0$ azaz $c_3 = \frac{5}{3} c_1$
x^2	$4 \cdot 3 \cdot c_4 - 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 6 \cdot 2 \cdot c_2 - 4c_2 = 0$ azaz $c_4 = \frac{6}{4} c_2$
x^3	$5 \cdot 4 \cdot c_5 - 3 \cdot 2 \cdot c_3 - 6 \cdot 3 \cdot c_3 - 4c_3 = 0$ azaz $c_5 = \frac{7}{5} c_3$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n(n-1) + 6n + 4)c_n = 0$ azaz $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+4)(n+1)c_n = 0$ vagyis $c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2} c_n$

A fentiekből ismét azt látjuk, hogy a páros n indexek összetartoznak, és a páratlan indexek is összetartoznak.

Páros indexek. Most $n = 2k - 2$, így a hatvány x^{2k}. A táblázat legalsó sora alapján

$$c_{2k} = \frac{2k+2}{2k} c_{2k-2} =$$

$$\frac{2k+2}{2k} \cdot \frac{2k}{2k-2} \cdot \frac{2k-2}{2k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{4}{2} c_0 =$$

$$(k+1) c_0.$$

Páratlan indexek. Most $n = 2k - 1$, így a hatvány x^{2k+1}. A táblázat alsó sora alapján

$$c_{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+1} c_{2k-1} =$$

$$\frac{2k+3}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k-3} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{3} c_1 =$$

$$\frac{2k+3}{3} c_1.$$

Az általános megoldás tehát:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1}.$$

Megjegyezzük, hogy a mértani sor összegképletének felhasználásával belátható, hogy a fenti (ún. hipergeometrikus) sorok összege az

$$y = c_0 \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)^2} + c_1 \frac{-x^3 + 3x}{3\left(x^2 - 1\right)^2}$$

„zárt” alakban is felírható. ■

4. PÉLDA Adjuk meg az $y'' - 2xy' + y = 0$ egyenlet általános megoldását.

Megoldás Legyen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

A behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Az előzőekhez hasonlóan az összevonás után a bal oldalon minden x-hatvány együtthatója 0:

Az x-hatvány	**és együtthatója**
x^0	$2 \cdot 1 \cdot c_2 + c_0 = 0$ azaz $c_2 = -\frac{1}{2} c_0$
x^1	$3 \cdot 2 \cdot c_3 - 2c_1 + c_1 = 0$ azaz $c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} c_1$
x^2	$4 \cdot 3 \cdot c_4 - 4c_2 + c_2 = 0$ azaz $c_4 = \frac{3}{4 \cdot 3} c_2$
x^3	$5 \cdot 4 \cdot c_5 - 6c_3 + c_3 = 0$ azaz $c_5 = \frac{5}{5 \cdot 4} c_3$
x^4	$6 \cdot 5 \cdot c_6 - 8c_4 + c_4 = 0$ azaz $c_6 = \frac{7}{6 \cdot 5} c_4$
$\vdots$	$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$ azaz $c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} c_n$

A táblázat utolsó sorában szereplő

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

rekurzív összefüggést ezúttal nem tudjuk elemi képlettel, „zárt” alakban, „expliciten” felírni. Az első néhány tagot kiírva az általános megoldás

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \ldots\right) +$$

$$c_1 \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \ldots\right). \quad \blacksquare$$

5.1. Feladatok

Az 1-18. feladatokban hatványsorba fejtés segítségével adjuk meg a differenciálegyenletek általános megoldását.

1. $y'' + 2y' = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$
6. $y'' - xy' + y = 0$
7. $(1 + x)y'' - y = 0$
8. $(1 - x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$
10. $y'' + y' - x^2 y = 0$
11. $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$
12. $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4y' + 2y = 0$

14. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
15. $y'' - 2xy' + 3y = 0$
16. $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$
17. $y'' - xy' + 3y = 0$
18. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$