Nagyon rövid bevezetés a valószínűségszámításba

Wettl Ferenc

2013-2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

E rövid tananyagot egy néhány órás gyors bevezető segédanyagának szánom. Előadás nélkül önmagában kevés, csak egy gyors áttekintéshez és a leglényegesebb fogalmak összefoglalójának használható.

1.1. Kombinatorikai gyorstalpaló

1.1.1. Szorzási szabály

A következőkben ismertetendő kombinatorikai alapfogalmak legtöbbje megoldható a *szorzási szabállyal*, mely szerint ha egy dolognak n lehetséges állapota van, míg egy másiknak m, akkor kettejüknek együtt nm. Például ha 3 ing és 2 nadrág közül választhatok, akkor összesen 6-féleképp öltözhetek fel.

1.1.2. Sorbarendezési feladatok – permutációk

Alapfeladat: Hányféleképpen rendezhető sorba n dolog.

minden elem különböző	$P_n = n!$
az elemek közt $k_1, k_2, \ldots, k_m$ azonos, ahol $k_1 + \cdots + k_m \le n$ ($k_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$)	$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_m)} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

Szokás a $k_i > 1$ helyett a $k_i \ge 1$ egyenlőtlenséget kikötni, ekkor $k_1+\cdots+k_m = n$. Így például a $P_8^{(3,3)}$ és a $P_8^{(3,3,1,1)}$ ugyanazt az ismétléses permutációt jelöli.

Példák. a) Hányféleképp rakható 5 különböző megírt levél 5 különböző címre megcímzett borítékba? *b)* Hányféleképp lehet a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsóba jutni egy királlyal csak jobbra és lefelé lépve? *c)* Hány anagrammája van a MATEMATIKA szónak? *d)* Hányféleképp járhat körtáncot n ember? *e)* Hány kölcsönösen egyértelmű $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény létezik?

Eredmények. a) P_5 *b)* $P_{14}^{(7,7)}$ *c)* $P_{10}^{(3,2,2)} = P_{10}^{(3,2,2,1,1,1)}$ *d)* $P_n/n = P_{n-1}$ *e)* P_n

1.1.3. Mintavételi feladatok – variációk, kombinációk

Alapfeladat: Legyen adva n különböző dolog. Egyesével húzva kiválasztunk közülük k darabot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? Ha számít a húzás sorrendje „n elem k-adosztályú variációiról”, ha nem számít, „kombinációiról” beszélünk. A variációt, illetve a kombinációt *ismétléses*nek nevezzük, ha a mintavétel *visszatevéses*.

	a húzás sorrendje	
a mintavétel	számít	nem számít
visszatevés nélküli	V_n^k	C_n^k
visszatevéses	$V_n^{k,\mathrm{i}}$	$C_n^{k,\mathrm{i}}$

A kombinációk és variációk kiszámítása az alábbi képletekkel történik:

	variációk	kombinációk
ismétlés nélküli ($k \le n$)	$V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
ismétléses	$V_n^{k,\mathrm{i}} = n^k$	$C_n^{k,\mathrm{i}} = \dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Példák. *a)* Egy n-tagú társaságban a tagoknak k különböző tisztséget kell betölteniük. Hányféleképp tehetik ezt meg, ha mindenkinek csak egy tisztsége lehet, és hányféleképp, ha a tisztségek halmozhatók? *b)* Hányféle lehet egy lottóhúzás eredménye? *c)* Hányféleképp lehet a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsóba jutni egy királlyal csak jobbra és lefelé lépve? *d)* Hány 3-lyukú buszjegy van?

Eredmények. *a)* V_n^k, $V_n^{k,\mathrm{i}}$ *b)* C_{90}^5 *c)* C_{14}^7 *d)* C_9^3

1.1.4. Kiválasztási feladatok (lényegében azonos az előzővel)

Alapfeladat: Legyen adva n különböző típusú dolog. Egyesével kiválasztunk közülük k darabot. Vizsgáljuk, hogy számít-e a húzás sorrendje, és hogy minden típusból csak egy, vagy legalább k áll rendelkezésre.

minden tárgyból	a sorrend számít	nem számít
egyetlen példány van	V_n^k	C_n^k
legalább k azonos példány van	$V_n^{k,\mathrm{i}}$	$C_n^{k,\mathrm{i}}$

Példák. *a)* Hányféleképp tölthető ki egy totoszelvény egy hasábja? *b)* A malacperselyben csak 1, 2, és 100 Ft-os érmék vannak, mindegyikből „elég sok”. Kivéve belőle 10 érmét, hányféle lehet azok összege? *c)* Hányféleképp vásárolható 4-féle sütiből 10 darab, ha mindegyik fajtából van legalább 10-10?

Eredmények. *a)* $V_3^{13,\mathrm{i}}$ *b)* $C_3^{10,\mathrm{i}}$, mert egy összeg csak egyféleképp jöhet ki, *c)* $C_4^{10,\mathrm{i}}$

1.1.5. Címkézési/hozzárendelési feladatok

Alapfeladat: Legyen adva n különböző címke. Megjelölünk velük k dolgot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Minden címkéből	A dolgok különbözőek	megkülönböztethetetlenek
egy van	V_n^k	C_n^k
legalább k van	$V_n^{k,\mathrm{i}}$	$C_n^{k,\mathrm{i}}$

Példák. *a)* Hány részhalmaza van egy m-elemű halmaznak? *b)* Hányféleképp lehet kilyukasztani egy buszjegyet?

Eredmények. *a)* $V_2^{m,\mathrm{i}}$ *b)* $V_2^{9,\mathrm{i}} - 1$

1.1.6. Szétosztási feladatok

Alapfeladat: Adott n különböző doboz, és azokba szétosztunk k dolgot.

Minden dobozba	A dolgok különbözőek	megkülönböztethetetlenek
csak egy dolog fér	V_n^k	C_n^k
legalább k dolog fér	$V_n^{k,\mathrm{i}}$	$C_n^{k,\mathrm{i}}$

1.1.7. Véges számhalmazok közti leképezések száma

Alapfeladat: Hány $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény létezik?

	bármilyen	monoton növekvő
egy-egyértelmű	V_n^k	C_n^k
bármilyen	$V_n^{k,\mathrm{i}}$	$C_n^{k,\mathrm{i}}$

1.1.8. Kapcsolatok

$P_n^{(1,1,\ldots,1)} = P_n$, $V_n^n = P_n$, $P_n^{(k,n-k)} = C_n^k$, $k!C_n^k = V_n^k$, $C_n^{k,\mathrm{i}} = C_{n+k-1}^k$, $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, $V_2^{k,\mathrm{i}} = \sum_{m=0}^k C_k^m$.

1.2. Valószínűségszámítási alapfogalmak

1.2.1. Események

Kísérlet, eseménytér, elemi esemény Vizsgálunk egy jelenséget, egy folyamat eredményét, vagy figyeljük egy kísérlet kimeneteleit. A lehetséges kimenetelek halmazát *eseménytérnek* nevezzük. Ezt a továbbiakban mindig Ω-val fogjuk jelölni. Az eseménytér elemeit *elemi eseményeknek* is nevezzük. Kockadobás esetén (ha a kísérlet eredményét a felső lapon látható mintával írjuk le):

$$\Omega = \left\{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ \right\}.$$

Esemény, lehetetlen és biztos esemény Az eseménytér részhalmazai az *események*. Például legyen A az az esemény, hogy páros számot dobok a kockával, azaz

$$A = \left\{ ⚁, ⚃, ⚅ \right\} \subseteq \Omega.$$

Maga az Ω is egy esemény, ami a definíciója szerint biztosan bekövetkezik minden kísérletnél: ezt nevezzük *biztos eseménynek*. Az üres halmaz ($\emptyset$) is része Ω-nak. Ez alkalmas a *lehetetlen esemény* megjelölésére, hisz egy kísérlet lehetetlen kimenetele azt jelenti, hogy Ω egyik eleme sem lett a kísérlet eredménye, ami lehetetlen. (Ezt sokféleképp megfogalmazhatjuk, a kockadobásnál például az az esemény, hogy 7 pötty van a fölső lapon, lehetetlen.)

Egy kísérlet kimenetelei végtelen halmazt is alkothatnak. Ha véletlenül kijelölünk egy pontot a $[0, 1]$ intervallumon, mondhatjuk, hogy $\Omega = [0, 1]$.

Műveletek eseményekkel Az eseményekkel műveletek is végezhetők, amik lényegében egybeesnek a halmazelméleti műveletekkel. Két esemény *összegén* halmazelméleti uniójukat, *szorzatukon* metszetüket, esemény *ellentettjén* (komplementerén) halmazelméleti komplementerét értjük. Legyen például A, hogy páros számot, B, hogy prímet dobunk, azaz

$$A = \left\{ \text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅} \right\}, \qquad B = \left\{ \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚄} \right\}. \tag{1}$$

Ekkor

$$A + B = \left\{ \text{⚁},\ \text{⚂},\ \text{⚃},\ \text{⚄},\ \text{⚅} \right\},\ AB = \{ \text{⚁} \},\ \bar{A} = \left\{ \text{⚀},\ \text{⚂},\ \text{⚄} \right\}.$$

Az A és B esemény különbségén azt az eseményt értjük, mely csak akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem, azaz $A - B = A\bar{B}$. A fenti halmazokkal $A - B$ a nem prím páros számok halmazát adja, azaz

$$A - B = \left\{ \text{⚃},\ \text{⚅} \right\}.$$

Két eseményt *kizárónak* nevezünk, ha halmazként diszjunktak, azaz sosem következhetnek be egyszerre. Például az, hogy összetett számot dobok vagy prímet, kizáró események.

Az események halmazát a fenti műveletekkel *eseményalgebrának* nevezzük.[1]

1.2.2. Relatív gyakoriság és valószínűség

Ha azt látjuk, hogy n kísérletből egy esemény k-szor következik be, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény gyakorisága k, *relatív gyakorisága* k/n. Az A esemény relatív gyakoriságát jelölje r_A. Könnyen igazolható, hogy a relatív gyakoriság a következő három tulajdonsággal rendelkezik:

$$r_A \geq 0,\ \text{tetszőleges } A \text{ eseményre,} \tag{R1}$$

$$r_\Omega = 1, \tag{R2}$$

$$r_{A+B} = r_A + r_B,\ \text{ha } A \text{ és } B \text{ tetszőleges két kizáró esemény.} \tag{R3}$$

Ha azt tapasztaljuk, hogy az r_A relatív gyakoriság nagy n esetén egy fix szám körül ingadozik, akkor ezt az A eseményre jellemző számot az A esemény valószínűségének nevezzük és $\mathrm{P}(A)$-val jelöljük. (Használják még a $\Pr(A)$ és a $\mathbb{P}(A)$ jelölést is.) Hogy mi ez a szám pontosan, az adott kísérlet körülményeitől függ, ez már nem tartozik a matematika tárgykörébe. Mi csak annyit teszünk, hogy meghatározzuk, mely P függvény lehet valószínűség egy adott Ω eseménytér eseményein. Például a kockadobásnál úgy gondoljuk, hogy egy szabályos kocka esetén mindegyik elemi esemény valószínűsége $1/6$. De lehet, hogy a kocka

[1] Véges Ω esetén az eseményalgebra Ω összes részhalmazából áll. Ha Ω végtelen, akkor az eseményalgebra Ω „bizonyos” részhalmazaiból áll, nem feltétlenül az összesből. Csak azt kívánjuk meg, hogy megszámlálhatóan sok eseményalgebrabeli részhalmaz összege, szorzata és bármelyik ellentettje, valamint az üres halmaz és maga Ω is is benne legyen az eseményalgebrában (az ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező halmazrendszereket σ-algebráknak nevezzük).

ugyan szabályos, de a feldobás közben történik valami, amitől a hat elemi esemény valószínűsége rendre $1/2$, $1/8$, $1/8$, $1/8$, $1/8$, 0. Ekkor annak valószínűsége, hogy páros számot dobunk, nem a várt $1/2$, hanem $1/4$. Ha a relatív gyakoriság értéke a valószínűség közelében van, akkor tulajdonságai összhangban kell hogy legyenek az (R1)–(R3) összefüggésekkel:

$$\mathrm{P}(A) \geq 0, \text{ tetszőleges } A \text{ eseményre,} \tag{V1}$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1 \tag{V2}$$

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B), \text{ ha } A \text{ és } B \text{ tetszőleges két kizáró esemény.} \tag{V3}$$

A (V1)–(V3) kikötéseket a valószínűség axiómáinak nevezzük. Ha egy függvény eleget tesz ezen axiómáknak, akkor még a következő tulajdonságokkal is rendelkezik

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{P}(A-B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB), \tag{3}$$

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB), \tag{4}$$

$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_m). \tag{5}$$

ahol A és B két tetszőleges esemény, A_1, A_2,…,A_m viszont páronként kizáró események az Ω eseménytérben.

Fontos kiemelni, hogy a (V3) axióma két kizáró esemény összegének, míg a (4) két tetszőleges esemény összegének valószínűségéről szól. Világos, ha A és B kizáró, akkor szorzatuk a lehetetlen esemény, melynek valószínűsége 0.

1.2.3. Két érdekes feladat

A valószínűségszámítás elemi törvényeinek megértésében és egyszerű feladatok megoldásában sokat segíthet a gyakoriságokkal való megközelítés. Ez azt jelenti, hogy az adott kérdés megértéséhez egy olyan kisérletsorozatot képzelünk el, amelyben a relatív gyakoriságok megegyeznek a nekik megfelelő valószínűségekkel. Pl. 10000-szer feldobunk egy érmét, és úgy tekintjük, hogy 5000-szer jött ki fej (ami egyébként a valóságban igen valószínűtlen).

1. feladat (Betegségteszt). *Egy megvizsgált népcsoport 1 %-a szenved AIDS-ben. Az AIDS kimutatására készült egy teszt, mely*

(a) *egy AIDS betegen 90 %-os valószínűséggel kimutatja a betegséget, és amely*

(b) *egy nem AIDS-es személyt 10 %-os valószínűséggel AIDS-esnek mutat.*

Mennyi a valószínűsége, hogy egy megvizsgált személy valóban AIDS-es, ha a tesztje pozitív.

Megoldás. Képzeljünk el egy 1000 fős populációt, melyben a gyakoriságok épp megfelelnek a valószínűségeknek, tehát közülük 10-en AIDS-esek, akik közül 9-ről a teszt ezt meg is tudja állapítani. A maradék 990 ember nem AIDS-es, de 10 %-okukat, azaz 99 embert a teszt AIDS-esnek mutat. Összefoglalva: az 1000 ember közül a teszt $99 + 9 = 108$ embert mutat AIDS-esnek, de csak 9 valóban az, tehát annak valószínűsége, hogy egy pozitív teszt esetén valaki beteg is legyen $9/108 = 0{,}08\dot{3}$, azaz $8{,}\dot{3}\,\%$. □

2. feladat (3 ajtó probléma/Monty Hall Problem). *Három ajtó egyike mögött egy értékes jutalom van. A játékos választ egy ajtót (mondjuk az elsőt). A játékvezető (Monty) a másik kettő egyikét kinyitja (mondjuk a másodikat), megmutatva, hogy amögött nincs ajándék. (Ha a jutalom a harmadik mögött van, akkor a másodikat nyitja ki, ha az első ajtó mögött, akkor véletlenszerűen választ a két másik ajtó közül). Ezek után a játékos még megváltoztathatja döntését! Mi a jobb taktika: megmaradni az eredeti döntés mellett vagy változtatni rajta?*

Megoldás. Játszuk el a játékot 30-szor, és a játékos mindig az első ajtóra tippeljen. A 30 játékból az ajándék 10-szer az első, 10-szer a második és 10-szer a harmadik ajtó mögött legyen. A játékvezető az esetek felében, azaz 15-ször a második, és 15-ször a harmadik ajtót nyitja ki (ha az ajándék az első mögött van, 5-ször a másodikat, ötször a harmadikat nyitja ki, amikor a harmadik ajtó mögött van, tehát 10 esetben a másodikat). Abból a 15 esetből, amikor a játékvezető a második ajtót nyitja ki, az ajándék ötször az A ajtó mögött van, 10-szer a harmadik mögött. Eszerint a játékosnak érdemes megváltoztatnia döntését, hisz annak valószínűsége, hogy a harmadik mögött van az ajándék, $10/15 = 2/3$, míg annak valószínűsége, hogy az első mögött van, csak $5/15 = 1/3$. □

1.2.4. Valószínűségi mező

A valószínűség definícióját pontosítjuk, kiterjesztve az események közti műveleteket véges sok eseményről megszámlálhatóan végtelen sokra:

1. definíció. *Az* $(\Omega, \mathcal{E}, \mathrm{P})$ *hármas egy* valószínűségi mező, *ha*

1. *Ω egy nem üres halmaz (ez lesz az eseménytér),*
2. *$\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ egy σ-algebra (az események algebrája), ami azt jelenti, hogy $\mathcal{E}$ az Ω részhalmazainak egy olyan halmaza, melyre*
   (a) $\Omega \in \mathcal{E}$
   (b) *ha $A \in \mathcal{E}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ zárt a komplementerképzésre),*
   (c) *ha $A_i \in \mathcal{E}$, ahol $i = 1, 2, \ldots$, akkor $\sum_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{E}$, (azaz $\mathcal{E}$ zárt a megszámlálható összegképzésre),*
3. *$\mathrm{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ olyan függvény, melyre*
   (a) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
   (b) *ha $A_i \in \mathcal{E}$ $i = 1, 2, \ldots$ páronként kizáró események (diszjunkt részhalmazok Ω-ban), akkor $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathrm{P}(A_i)$*

A fenti axiómákból azonnal következik, hogy a lehetetlen esemény is eleme $\mathcal{E}$-nek, és hogy $\mathcal{E}$ zárt a megszámlálható szorzatképzésre is, azaz $\prod_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{E}$ is fönnáll.

Valószínűségi mezőre legegyszerűbb példa az ún. *klasszikus valószínűségi mező.* Ekkor a kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, tehát Ω véges halmaz, és az egyes elemi eseményeknek azonos a valószínűségük, azaz ha n a kimenetelek száma, akkor mindegyik bekövetkeztének $\frac{1}{n}$ a valószínűsége. Így egy olyan A eseménynek, mely k elemi esemény összege, $\frac{k}{n}$ a valószínűsége. A klasszikus valószínűségi mező szabályai szerint számoljuk például a véletlenszerűen földobott pénzérmére, vagy a szabályos kockára vonatkozó kérdéseket.

A kombinatorikai bevezetőben tárgyalt feladatok számtalan klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó feladat megoldásában segítenek.

Példák. a) Mennyi a valószínűsége, hogy két pénzérmét egyszerre földobva az egyik fej, a másik írás lesz? *b)* Mennyi a valószínűsége, hogy egy lottószelvénnyel 5-találatost érünk el. *c)* Mennyi a valószínűsége, hogy egy TOTO-szelvény egyik véletlenszerűen kitöltött hasábján $13+1$-találatot érünk el? *d)* Mennyi a valószínűsége, hogy egy 10-szer földobott pénzérme épp 5-ször esik fejre?

Eredmények. a) A négy egyenlően valószínű eset {FF, FI, IF, II} közül kettő a *kedvező* esetek száma, a válasz: $\frac{1}{2}$. *b)* $1/C_{90}^5 = 1/43949268 \approx 2.27535 \cdot 10^{-8}$, *c)* $1/V_3^{14,i} = 1/3^{14} = 1/4782969 \approx 2.09 \cdot 10^{-7}$, *d)* $C_{10}^5/V_2^{10,i} = \binom{10}{5}/2^{10} = 63/256 = 0.24609375$.

1.2.5. Események függetlensége

Az A és B eseményt *függetlennek* nevezzük, ha $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. Az A_1, A_2,..., A_n eseményeket *teljesen függetlennek* nevezzük, ha az események közül bármely $k \leqslant n$ eseményre

$$\mathrm{P}(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\,\mathrm{P}(A_{i_2})\dots\mathrm{P}(A_{i_k}).$$

1.2.6. Feltételes valószínűség

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőt. Legyen B egy tetszőleges, 0-nál nagyobb valószínűségű esemény, azaz $B \in \mathcal{E}$ és $\mathrm{P}(B) > 0$. Ha ezután egy kísérlet eredményét csak akkor figyeljük meg, ha B bekövetkezett, akkor egy új valószínűségi mezőhöz jutunk, melyben Ω szerepét B veszi át, az $A \in \mathcal{E}$ esemény helyett pedig az AB eseményt fogjuk figyelni. Kérdés azonban, hogy mi lesz az új valószínűségi függvény? Annyi biztos, azt úgy kell megválasztani, hogy a B valószínűsége 1 legyen, hisz most ez válik biztos eseménnyé.

Kezdjük ismét a relatív gyakorisággal. Tegyük fel, hogy n kísérletből az A, B és az AB gyakorisága rendre r_A, r_B és r_{AB}. Azt az eseményt, hogy „bekövetkezik A, de csak feltéve hogy B is bekövetkezett", $A \mid B$-vel jelöljük, és úgy olvassuk, hogy „A feltéve B". Ennek relatív gyakorisága

$$\frac{r_{AB}}{r_B} = \frac{r_{AB}}{n} \Big/ \frac{r_B}{n} \approx \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$

Ez azt jelenti, hogy az $A \mid B$ relatív gyakorisága a $\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(B)$ érték körül ingadozik. Ez vezet a következő definícióhoz:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Megmutatható, hogy a $(B, \mathcal{E}_B, \mathrm{P}_B)$ hármas is valószínűségi mező, ahol $\mathcal{E}_B = \{AB : A \in \mathcal{E}\}$ és $\mathrm{P}_B : A \mapsto \mathrm{P}(A \mid B)$.

Példák. a) Mennyi a valószínűsége, hogy páros számot dobunk egy kockával, feltéve, hogy prímet? *b)* Tegyük fel, hogy egy születendő gyermek neme 1/2 valószínűséggel lány. Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyermek lány, ha tudjuk, hogy van a gyermekek közt lány?

Eredmények. a) A prímek közt csak egy páros prím van, és a dobókockán 3 prím, tehát 1/3 a válasz. A definíció alapján számolva és az 1 jelöléseit használva $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\text{prímet dobunk}) = 1/2$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\text{párost dobunk}) = 1/2$, $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(\text{páros prímet dobunk}) = 1/6$, így

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\text{páros prímet dobunk})}{\mathrm{P}(\text{prímet dobunk})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

b) Ha egy családban van lány, akkor három egyenlően valószínű eset lehetséges: LL, LF, FL, így a feltételes valószínűség 1/3. A definíció alapján számolva:

$$\mathrm{P}(\text{mindkettő lány} \mid \text{van köztük lány}) = \frac{\mathrm{P}(\text{mindkettő lány})}{\mathrm{P}(\text{van köztük lány})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Itt kihasználtuk, hogy $\mathrm{P}(\text{mindkettő lány és van köztük lány}) = \mathrm{P}(\text{mindkettő lány})$.

2. Valószínűségi változók

2.1. Alapfogalmak

valószínűségi változó A *valószínűségi változó* egy olyan X függvény, mely egy kísérlet minden kimeneteléhez egy valós számot rendel, tehát a valószínűségi változó egy $X : \Omega \to \mathbf{R}$ függvény. (Fontos: a valószínűségi változó nem az eseményekhez rendel számot, hanem csak az elemi eseményekhez!).

Például a kockadobás esetén az az X függvény, mely minden dobás eredményéhez azt a számot rendeli, ahány pont van a kocka felső lapján, egy valószínűségi változó. Tehát az

$$\Omega = \left\{ ⚀,\ ⚁,\ ⚂,\ ⚃,\ ⚄,\ ⚅ \right\}.$$

jelölés mellett

$$X(⚀) = 1, \quad X(⚁) = 2, \ldots \quad X(⚅) = 6. \tag{6}$$

Eloszlásfüggvény Az $(\Omega, \mathcal{E}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az

$$F : \mathbf{R} \to [0, 1]; x \mapsto F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

függvény, ahol $\mathrm{P}(X < x)$ jelentése $\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$. Ahhoz, hogy a definícióban szereplő valószínűség létezzen az kell, hogy az

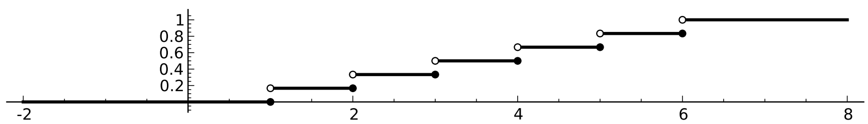
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \subseteq \Omega$$

halmaz esemény legyen, azaz eleme legyen $\mathcal{E}$-nek. E feltételt ezért a valószínűségi változó definíciójának részévé szokás tenni.

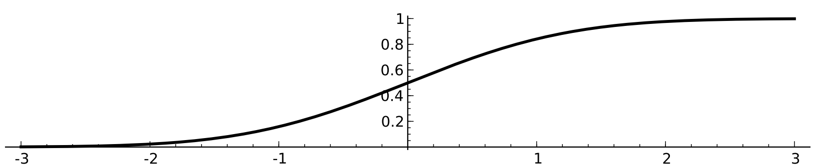
Az eloszlásfüggvény tulajdonságai Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F_X. Ekkor

1. $\lim\limits_{-\infty} F_x = 0$
2. $\lim\limits_{\infty} F_x = 1$
3. F_X balról folytonos, azaz minden a helyen $\lim_{a-0} F_X = F(a)$.
4. ha az a pontban F_X nem folytonos, akkor $\mathrm{P}(X = a) = \lim_{a+0} F_X - \lim_{a-0} F_X$.

Például a kockadobás eloszlásfüggvénye:



A jól ismert standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye:



2.1.1. Diszkrét valószínűségi változók

A valószínűségi változók egyik fontos osztályát alkotják a diszkrét valószínűségi változók. Ekkor Ω véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, tehát elemei felsorolhatók, így írhatjuk, hogy $\Omega = \{\, \omega_1, \omega_2, \dots \}$.[2]

Diszkrét valószínűségi változó *eloszlásán* a

$$\{\, p_1, p_2, p_3, \dots \}$$

halmazt értjük, ahol $p_i = \mathrm{P}(\omega_i)$. Minden valószínűségeloszlásra igaz, hogy

$$\sum_i p_i = 1,$$

hisz az elemi események összege kiadja a biztos eseményt, és az elemi események egymást kölcsönösen kizárják!

Példák. a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy kockával épp a 10-edik dobásra kapunk 6-ost? *b)* Mennyi a valószínűsége, hogy egy kockával 10-szer dobva, épp kétszer lesz 6-os az eredmény? És hogy n-szer dobva épp k-szor lesz 6-os?

[2] A diszkrét valószínűségi változó fogalma ennél valamivel tágabban is értelmezhető, ha csak annyit követelünk meg, hogy Ω-nak legyen egy olyan megszámlálható részhalmaza, mely 1 valószínűségű.

Eredmények. *a)* 1. megoldás: ha 10-edikre kapunk először 6-ost, akkor előtte 9-szer kaptunk más számot, az ilyen esetek száma 5^9. 10 dobás összes kimeneteleinek száma 6^{10}, így

$$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{5^9}{6^{10}} = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6} \approx 0.0323.$$

2. megoldás: az egymás utáni kockadobások eredményét egymástól függetleneknek tekinthetjük, így együttes bekövetkeztük valószínűsége megegyezik valószínűségeik szorzatával. Így annak valószínűsége, hogy 9-szer nem 6-ost dobunk $(\frac{5}{6})^9$, annak valószínűsége, hogy 10-edikre 6-ost dobunk, $\frac{1}{6}$. Tehát a valószínűség $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6}$.

b) 1. megoldás: Megszámoljuk az olyan 10-hosszú kockadobás-sorozatokat, ahol épp kétszer lett 6-os az eredmény. Az a két hely $\binom{10}{2} = 45$-féleképp választható ki, a többi 8 dobás eredménye 5^8-féle lehet. Az összes 10-hosszú dobássorozatok száma 6^{10}, tehát annak valószínűsége, hogy 10 dobásból kettő eredménye 6-os:

$$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{10}{2}5^8}{6^{10}} = \binom{10}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0.29071.$$

2. megoldás: Az, hogy adott két helyen 6-ost kapunk, a többin nem, e feladat *a)* részében látott megoldáshoz hasonlóan kiszámolható: $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Az pedig, hogy melyik legyen ez a két hely, $\binom{10}{2}$-féleképp választható ki, azaz a válasz most is $\binom{10}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

A feladat általánosan is ugyanilyen gondolatmenetekkel megkapható, vagyis annak valószínűsége, hogy n-szer dobva épp k-szor lesz 6-os a dobás eredménye

$$\binom{n}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}$$

Az X valószínűségi változó (n,p) paraméterű *binomiális eloszlású*, ha

$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

ahol $0 < p < 1$.

Az előző feladat *b)* kérdése $(10, 1/6)$ paraméterű binomiális eloszlású.

Általában binomiális eloszlású valószínűségi változót kapunk, ha egy n-szer megismételt kísérletben egy p valószínűségű esemény bekövetkezéseinek X számát figyeljük.

2.1.2. Folytonos valószínűségi változók

Sűrűségfüggvény Egy valószínűségi változó *sűrűségfüggvényén* egy olyan nem negatív f függvényt értünk, melyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Az elnevezések kicsit félrevezetőek, a sűrűségfüggvény azt fejezi ki, hogy a valószínűségek hogyan oszlanak el a valósok halmazán, diszkrét párja a valószínűségeloszlás, míg az eloszlásfüggvényt inkább akkumulált eloszlásfüggvénynek kéne nevezni.

A sűrűségfüggvény fenti definíciójából adódó tulajdonságai:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

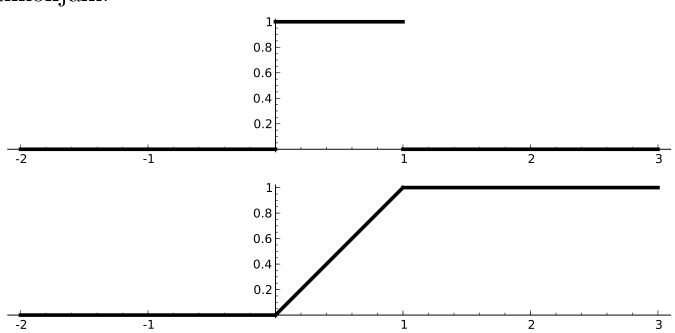
Egyenletes eloszlású valószínűségi változó A $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$$

Grafikonjaik:



Folytonos valószínűségi változó Egy valószínűségi változót folytonosnak nevezünk, ha létezik sűrűségfüggvénye. Az elnevezés onnan származik, hogy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos[3].

2.2. Várható érték, szórás

Várható érték Az X valószínűségi változó várható értékén az általa fölvett értékek valószínűségükkel súlyozott átlagát értjük, melyet $\mathrm{E}(X)$ $(\mathbb{E}(X)$ vagy

[3]ennél több is igaz, az X valószínűségi változó folytonos, ha eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, ami a folytonosságnál egy erősebb kitétel.

$M(X)$) jelöl. Ez diszkrét valószínűségi változó esetén az

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i p_i \qquad (\text{ahol } p_i = \mathrm{P}(X = x_i)),$$

képlettel számolható, feltéve, hogy e sor abszolút konvergens. Azért nem elég a sor konvergenciája, mert a csak feltételesen konvergens sorok átrendezhetők úgy, hogy összegük megváltozzon, a valószínűségi változó várható értéke pedig nem függhet az összeadás sorrendjétől. Folytonos valószínűségi változó esetén

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x$$

feltéve hogy ez az integrál konvergens.

A kockadobás (6)-ban definiált valószínűségi változójának várható értéke:

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

A várható érték egyik legfontosabb tulajdonsága a linearitása, azaz ha X és Y két valószínűségi változó, és $c, d \in \mathbf{R}$ tetszőleges valósok, akkor

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y).$$

Medián Nem tévesztendő össze a várható érték a mediánnal. Az m szám az X valószínűségi változó mediánja, ha

$$\mathrm{P}(X < m) \leqslant \frac{1}{2}, \text{ és } \mathrm{P}(m < X) \leqslant \frac{1}{2}.$$

A medián nem egyértelmű, például a kockadobás mediánja minden 3 és 4 közé eső m szám. Ha viszont X folytonos, akkor mediánja az az egyértelműen létező m szám, melyre $F_X(m) = \frac{1}{2}$. Például a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó mediánja $\frac{1}{2}$.

q-kvantilis A medián általánosítása $\frac{1}{2}$-ről tetszőleges 0 és 1 közé eső q számra a q-kvantilis. Az X valószínűségi változó q-kvantilisa az az m_q szám, melyre

$$\mathrm{P}(X < m_q) \leqslant q, \text{ és } \mathrm{P}(m_q < X) \leqslant 1 - q.$$

Folytonos X valószínűségi változó q-kvantilise az az egyértelműen létező m_q szám, melyre $F_X(m_q) = q$.

Szórás Valószínűségi változó szórásnégyzete a várható értéktől való eltérése négyzetének a várható értéke. A szórás ennek négyzetgyöke. Az X valószínűségi változó szórását $\mathrm{D}(X)$ vagy $\mathbb{D}(X)$ jelöli. Tehát

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(x))^2] = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X). \tag{7}$$

Az utóbbi egyenlőség a várható érték linearitásával igazolható:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(X) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(x))^2] \\ &= \mathrm{E}[X^2 - 2\,\mathrm{E}(X)X + \mathrm{E}^2(X)] \\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}^2(X) \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X).\end{aligned}$$

A kockadobás szórásnégyzete

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.91\dot{6}$$

A $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás szórásnégyzete:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x \,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$