1. Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények alaprendszerét alkotják a megadott lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek, és ezután oldjuk meg az inhomogént az állandók variálásának módszerével!

a) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2, \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x - 1$

b) $xy'' - \frac{6}{x}y = 6x^2, \quad y_1 = \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = x^3$

c) $xy''' - y'' - xy' + y = x^2, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x, \quad y_3 = \operatorname{sh} x$

▷ a) Az y_1-et behelyettesítve ($y_1' = -e^{-x}$, $y_1'' = e^{-x}$): $xe^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) - e^{-x} = 0$, és y_2-t behelyettesítve ($y_2' = 1$, $y_2'' = 0$): $x \cdot 0 + (x-1) \cdot 1 - (x-1) = 0$, tehát y_1 és y_2 is megoldása a megfelelő homogén differenciálegyenletnek, és függetlenek is, ugyanis a Wronski-determináns $\begin{vmatrix} e^{-x} & (x-1) \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = xe^{-x}$ nem azonosan 0. Így $\{\, y_1, y_2 \,\}$ alaprendszere a másodrendű differenciálegyenletnek, és a homogén diffegyenlet általános megoldása $c_1y_1 + c_2y_2$.

Az inhomogén egyenlet megoldását $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ alakban keressük, ahol $c_i'(x) = W_i/W$ $(i = 1, 2)$, és $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & (x-1) \\ x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 + x$, továbbá $W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & x \end{vmatrix} = xe^{-x}$ (a Cramer-szabály szerinti $\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ oszlop a W_1-ben és W_2-ben a differenciálegyenlet 1 főegyütthatós formájának konstans tagját tartalmazza). Ebből $c_1(x) = \int(-x+1)e^x\,dx = (-x+1)e^x - \int -e^x\,dx = (-x+2)e^x + C_1$, és $c_2(x) = \int 1\,dx = x + C_2$, tehát $y = (-xe^x + C_1)e^{-x} + (x + C_2)(x-1) = x^2 - 2x + 2 + C_1e^{-x} + C_2(x-1)$.

▷ b) Az alaprendszer ellenőrzése után: $W = \begin{vmatrix} 1/x^2 & x^3 \\ -2/x^3 & 3x^2 \end{vmatrix} = 5$, $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 6x & 3x^2 \end{vmatrix} = -6x^4$, $W_2 = \begin{vmatrix} 1/x^2 & 0 \\ -2/x^3 & 6x \end{vmatrix} = 6/x$, $c_1(x) = -\frac{6}{25}x^5 + C_1$, $c_2(x) = \frac{6}{5}\ln x + C_2$, tehát $y = -\frac{6}{25}x^3 + \frac{6}{5}x^3\ln x + C_1\frac{1}{x^2} + C_2x^3$.

▷ c) Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy x, $\operatorname{ch} x$ és $\operatorname{sh} x$ megoldása a homogén diffegyenletnek, és mivel a diffegyenlet harmadrendű, ezek alaprendszert is alkotnak, ha a Wronski-determinánsuk nem azonosan 0. $W = -x$ (felhasználva, hogy $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$), $W_1 = x$, $W_2 = -x^2\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x$, $W_3 = x^2\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x$, $c_1(x) = -x + C_1$, $c_2(x) = x\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x + C_2$, $c_3(x) = -x\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x + C_3$, $y = -2 - x^2 + C_1x + C_2\operatorname{ch} x + C_3\operatorname{sh} x$.

2. Oldjuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenleteket!

a) $x^2y'' - 3xy' - 21y = -8x^5$

b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 - x^2, \quad y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = 0$

c) $x^2y'' - 3xy' + y = 0$

d) $xy''' + 2y'' = \dfrac{1}{x}$

▷ a) 1. megoldás: Legyen $x = e^t$. Ekkor $xy' = \dot{y}$, és $xy'' = \ddot{y} - \dot{y}$, az egyenlet pedig az $\ddot{y} - 4\dot{y} - 21y = -8e^{5t}$ állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletbe megy. A karakterisztikus egyenlete $m^2 - 4m - 21 = (m-7)(m+3) = 0$, aminek 7 és -3 a két gyöke, így a homogén egyenlet megoldása $y = c_1e^{7t} + c_2e^{-3t}$. Az inhomogénhez próbafüggvény az $y_p = Ae^{5t}$, és ezt behelyettesítve az $y_p = \frac{1}{2}e^{5t}$ megoldást kapjuk, amiből $y = \frac{1}{2}e^{5t} + c_1e^{7t} + c_2e^{-3t} = \frac{1}{2}x^5 + c_1x^7 + c_2x^{-3}$.

2. megoldás: A homogén $x^2y'' - 3xy' - 21y = 0$ egyenlet megoldásait keressük $y = x^m$ alakban! Ha behelyettesítjük y-t és deriváltjait a diffegyenletbe, azt kapjuk hogy $m(m-1)x^m - 3mx^m - 21x^m = 0$, azaz $m^2 - 4m - 21 = 0$, és ennek $m = 7$,és $m = -3$ a megoldásai.

Az $y_1 = x^7$ és $y_2 = x^{-3}$ alaprendszet ad. Ebből az inhomogén differenciálegyenletet állandók variálásával kapjuk meg. $y = c_1(x)x^7 + c_2(x)x^{-3}$. $W = -10x^3$, $W_1 = 8$, $W_2 = -8x^{10}$, $c_1(x) = \frac{2}{5}x^{-2} + C_1$, $c_2(x) = \frac{1}{10}x^8 + C_2$, $y = \frac{1}{2}x^5 + C_1x^7 + C_2x^{-3}$.

▷ c) Keressük a megoldást $u = x^m$ alakban. Ekkor $m(m-1)x^m - 3mx^m + x^m = 0$, tehát $m^2 - 4m + 1 = 0$. Ennek a gyökei $2 \pm \sqrt{3}$, tehát a megoldás $y = c_1e^{2+\sqrt{3}} + c_2e^{2-\sqrt{3}} = c_1x^{2+\sqrt{3}} + c_2x^{2-\sqrt{3}}$. (Mivel a másodrendű differenciálegyenlethez két lineárisan független megoldást találtunk, ez a lineáris kombináció valóban az összes megoldást adja meg.)

▷ d) Ez is Euler-féle: $x^3y''' + 2x^2y'' = x$ alakra hozható. A homogén megoldásait $y = x^m$ alakban keresve azt kapjuk, hogy $m(m-1)(m-2) + 2m(m-1) = 0$, azaz $m^3 - m^2 = m^2(m-1) = 0$, tehát a homogén alaprendszere $y_1 == x$, $y_2 = 1$, és $y_3 == \ln x$. Állandók variálásával megkaphatjuk az inhomogén egyenlet megoldásait is: $y = x\ln x + C_1x + C_2 + C_3\ln x$.

Másik megoldás: ha az $x = e^t$ helyettesítést végezzük, akkor az előzőekben megkapott karakterisztikus egyenletet fölhasználva az $\dddot{y} - \ddot{y} = e^t$ egyenletre jutunk, a homogén rész megoldása $y = C_1e^t + C_2 + C_3t$, az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = Ate^t$ alakban keressük, amiből $A = 1$, így a megoldás a $t = \ln x$ visszahelyettesítéssel: $y = x\ln x + C_1x + C_2 + C_3\ln x$.

Harmadik megoldás: ha először a $z = y''$ függvényt határozzuk meg az $xz' + 2z = \frac{1}{x}$ egyenletből. Ennek a megoldása $C/x^2 + 1/x$, aztán ezt kétszer integráljuk!

3. Oldjuk meg az alábbi differenicálegyenlet-rendszereket!

a) $\begin{array}{rcrcr} \dot{x_1} &=& 4x_1 &-& 5x_2 \\ \dot{x_2} &=& x_1 &-& 2x_2 \end{array}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

b) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

▷ a) Vektorosan írva az egyenletet: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. A sajátértékei az $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$ karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$. Ezekhez keresünk egy-egy sajátvektort: $\lambda_1 = 3$-hoz a $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletrendszert kell megoldani, és ennek a megoldása $s \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$, $\lambda_2 = -1$-hez a $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletet, amiből $\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ egy-egy sajátvektor a két sajátértékhez. Ezekkel kifejezhető a differeciálegyenlet-rendszer általános megoldása: $\mathbf{x} = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t$. A kezdeti feltételekből $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, azaz $1 = 5c_1 + c_2$ és $2 = c_1 + c_2$, amiből $c_1 = -\frac{1}{4}$, és $c_2 = \frac{9}{4}$.

Másképpen: visszavezethetjük a differenciálegyenlet-rendszert egy magasabb rendű differenciálegyenletre. A második egyenletből $x_1 = \dot{x}_2 + 2x_2$, és ezt behelyettesítve az elsőbe: $\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 = 4\dot{x}_2 + 8x_2 - 5x_2$, azaz $\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2 - 3x_2 = 0$. Ezt a szokásos módon megoldva: $x_2 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$, és az $x_1 = \dot{x}_2 + 2x_2$ összefüggésből $x_1 = 5c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$. A kezdeti feltételekből $c_1 = -\frac{1}{4}$, és $c_2 = \frac{9}{4}$.

▷ b) Az előbbi módon kiszámítjuk a sajátértékeket, de ezek itt nem valósak: $\lambda = -1 \pm i$, és a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. A $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}$ valós és képzetes része két független valós megoldást ad: $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t}(\cos t + i \sin t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t \right) + i \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t \right)$, tehát a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása $\mathbf{x} = c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos t \right) = c_1 \begin{bmatrix} -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{bmatrix}$.

▷ c) Az A mátrixnak csak egy valós sajátértéke van: $\lambda = 2$, és ehhez csak a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor skalárszorosai a sajátvektorok. Ilyenkor a $\mathbf{v} \cdot e^{\lambda t}$ mellett a $\mathbf{w} e^{\lambda t} + \mathbf{v} t e^{\lambda t}$ is megoldás, ahol $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Az utóbbi egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1+u \\ u \end{bmatrix}$ valamilyen $u \in \mathbb{R}$-re, speciálisan $u = 0$-ra $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tehát a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t} \right)$.

Természetesen ezt és a b) feladatot is vissza lehet vezetni másodrendű differenciálegyenlet megoldására.