Órai feladatok

1. Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?

a) $5x^2 - 1$ b) $x \cos 3x$ c) $e^{2x} \sin x$ d) $x^2 e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x$

▷ a) A próbafüggvény $Ax^2 + Bx + C$, és ezt akkor kell x^s-nel megszorozni, ha 0 a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
b) A próbafüggvény $(Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$, és akkor kell x^s-nel megszorozni, ha $3i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
c) A próbafüggvény $Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x$, és akkor kell x^s-nel megszorozni, ha $2 + i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
d) A próbafüggvény $(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} \cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^{2x} \sin x$, mert a két tagban szereplő polinom (x^2) másodfokú, a másik tagban szereplő nullad fokú (2), ezért a próbafüggvényben mindkét tagban a magasabb, azaz másodfokú polinomnak kell szerepelnie. Ráadásul ha $1 + 2i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke, akkor még x^s-nel is meg kell szorozni a próbafüggvényt!

2. Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 2y' + y = \sin x$ b) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

▷ a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 2m + 1 = 0$, azaz $(m + 1)^2 = 0$. Ennek a -1 kétszeres gyöke, tehát a homogén differenciálegyenletnek a $c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$ az általános megoldása. Az inhomogénhez próbafüggvény $y_p = A \cos x + B \sin x$ (nem kell x-szel beszorozni, mert i nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek). Ezt behelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy $2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$. Tehát $B = 0$ és $A = -\frac{1}{2}$, az inhomogén differenciálegyenlet megoldása pedig $y = -\frac{1}{2} \cos x + c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$.
b) A homogén ugyanaz, az inhomogén megoldásához a próbafüggvény viszont $(Ax + B)e^{-x} \cdot x^2 = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$ (x^2-tel azért kellett beszorozni, mert a -1 a karakterisztikus egyenletnek kétszeres gyöke). Az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve ezt a próbafüggvényt azt kapjuk, hogy $(6A + 2B)xe^{-x} + 2Be^{-x} = xe^{-x}$, amiből $B = 0$ és $A = \frac{1}{6}$. Így a differenciálegyenlet általános megoldása $y = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$. A kezdetiérték-probléma megoldása: $y = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + e^{-x}$.

3*. Oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket:

a) $y'' - \frac{x}{x^2-1} y' = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
b) $2yy'' = (y')^2$.

▷ a) Mivel y nem szerepel a differenciálegyenletben, csak a deriváltjai, helyettesíthetjük y'-t egy $z(x)$ függvénnyel, és erre egy elsőrendű, szétválasztható differenciálegyenletet kapunk: $z' - \frac{x}{x^2-1} z = 0$. Ennek a megoldása $z = A\sqrt{|x^2 - 1|}$. Mivel $z(0) = y'(0) = 1$, $A = 1$, és $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ a megadott pont közelében. Tehát $y' = z = \sqrt{1 - x^2}$. Ebből integrálással ($x = \sin u$ helyettesítéssel) $y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C$. Az $y(0) = 0$ kezdeti feltétel miatt $C = 0$, és $y = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2}$.
b) Mivel az x változó nem szerepel ebben a másodrendű differenciálegyenletben, y'-t y függvényeként írva ($y' = p(y)$) a p-re mint függvényre, és az y-ra mint változóra elsőrendű differenciálegyenletet kapunk: $2yp'p = p^2$ (ugyanis $y'' = p'p$), azaz $p \not\equiv 0$ esetén $2yp' = p$. Ez is szétválasztható, és a megoldása $p = A\sqrt{|y|}$. Ez az $y > 0$ esetén az $y' = A\sqrt{y}$

differenciálegyenlethez, $y < 0$ esetén az $y' = A\sqrt{-y}$ differenciálegyenlethez vezet, és ezek mindketten szétválaszthatók. A megoldás (összevonva): $y = B(x+C)^2$, illetve a korábban félretett $p \equiv 0$, azaz $y \equiv C$ megoldás.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő inhomogén, lineáris differenciálegyenleteket!
a) $y'' + y = -4\cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi$
b) $y''' - y'' - 2y' = x^3 + e^x$

2. Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?
a) x^2 b) $x^2\cos 2x$ c) $e^{2x}\sin 3x$ d) $x^2e^{2x}\sin 3x$

3*. Oldjuk meg az $y'' + (y')^2 = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ hiányos másodrendű differenciálegyenletet!

A gyakorló feladatok megoldása

1. a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 1 = 0$, gyökei $\pm i$ (egyszeresek), a homogén differenciálegyenlet megoldása $c_1\cos x + c_2\sin x$. Az inhomogénhez a próbafüggvény $(A\cos x + B\sin x)\cdot x = Ax\cos x + Bx\sin x$. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $-2A\sin x + 2B\cos x = -4\cos x$, amiből $A = 0$ és $B = -2$. Tehát az általános megoldás $y = -2x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$, és a kezdetiérték-probléma megoldása $y = -2x\sin x + \pi\sin x = (\pi - 2x)\sin x$.
b) A karakterisztikus egyenlet $m^3 - m^2 - 2m = 0$, azaz $m(m-2)(m+1) = 0$. A gyökei $0, 2, -1$, egyszeresek, a homogén általános megoldása $c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$. Az inhomogént két részre bontjuk. Az x^3 jobb oldalhoz a próbafüggvény $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Behelyettesítés után ebből az $y_1 = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x$. Az e^x jobb oldalhoz a próbafüggvény Ae^x, és behelyettesítés után az $y_1 = -\frac{1}{2}e^x$ megoldást kapjuk. Tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása $y = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x - \frac{1}{2}e^x + c_1 + c_2e^{2x} + c_2e^{-x}$.

2. a) A próbafüggvény $Ax^2 + Bx + C$, és ezt akkor kell x^s-nel megszorozni, ha 0 a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
b) A próbafüggvény $(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x$, és akkor kell x^s-nel megszorozni, ha $2i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
c) A próbafüggvény $Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x$, és akkor kell x^s-nel megszorozni, ha $2 + 3i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke.
d) A próbafüggvény $(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)e^{2x}\sin 3x$. Ha $2 + 3i$ a karakterisztikus egyenletnek s-szeres gyöke, akkor még x^s-nel is meg kell szorozni a próbafüggvényt!

3*. Kétféleképpen is megoldhatjuk. A $z(x) = y'(x)$ helyettesítéssel a $z' + z^2 = 1$ szétválasztható differenciálegyenletet kapjuk: $\frac{z'}{1-z^2} = 1$, amiből az $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$ felbontás segítségével az $\ln\frac{1+z}{1-z} = 2x + c$, ahol $y'(0) = 0$ miatt $c = 0$, tehát $\ln\frac{1+z}{1-z} = 2x$, és így $y' = z = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, így $y = \ln(\operatorname{ch} x) + C$. Felhasználva az $y(0) = 0$

feltételt is, azt kapjuk, hogy $y = \ln(\operatorname{ch} x)$.
Ha viszont a $p(y) = y'$ helyettesítést használjuk (minthogy x sem szerepel a differenciálegyenletben), akkor a $\frac{p'p}{1-p^2} = 1$ összefüggésből $-\frac{1}{2}\ln|1-p^2| = y + c$ adódik. Mivel $y = 0$-ra $x = 0$, és így $y' = 0$ is igaz a kezdeti feltételek szerint, $p(0) = 0$, tehát $c = 0$, és p-re azt kapjuk, hogy $1 - p^2 = e^{-2y}$, azaz $y' = \pm\sqrt{1 - e^{-2y}}$. Ezt szétválaszthatóként megoldva $\pm x + C = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2y}}}\, dy = \int \frac{e^y}{\sqrt{e^{2y}-1}}\, dy = \operatorname{arch}(e^y)$. A kezdeti feltételek miatt $C = 0$, és $y = \ln(\operatorname{ch} x)$.