Órai feladatok

1. Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? Az egzaktakat oldjuk meg!

a) $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0, \ \ y(1) = 1$

b) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$

c) $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y)y' = 0$

▷ a) $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ és $Q(x,y) = y^2 - 3x^2y$ kétváltozós függvényekkel $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú. $P_y = Q_x = 6xy$, így a differenciálegyenlet egzakt, azaz (P,Q)-nak mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek van potenciálfüggvénye. Az egyik potenciálfüggvény $u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3$, így a differenciálegyenlet megoldása az $u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$ implicit egyenlettel megadott y valamely C konstansra. A kezdeti feltétel miatt $C = -\frac{11}{12}$.
b) Nem egzakt: $P_y = -x$ és $Q_x = y - 2x$. c) Egzakt: $P_y = Q_x = \frac{1}{y} + e^x$. A megoldása $u(x,y) = C$, ahol u a $(P(x,y), Q(x,y))$ vektor-vektorfüggvény egyik potenciálfüggvénye. $u_x = P$-ből $u = x\ln y + ye^x + 2x + g(y)$ valamely $g(y)$ függvényre, és $u_y = \frac{x}{y} + e^x + g'(y) = \frac{x}{y} + e^x - \operatorname{ch} y$, tehát $g(y) = -\operatorname{sh} y$, és ezzel $u(x,y) = x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y$ megfelelő. A differenciálegyenlet y megoldását az $x\ln y + ye^x + 2x - \operatorname{sh} y = C$ implicit egyenlet adja meg tetszőleges C konstanssal.

2. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$

b) $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$

▷ a) $P_y = -x, \ \ Q_x = y - 2x$, tehát a differenciálegyenlet nem egzakt. Viszont $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{x-y}{xy - x^2} = -\dfrac{1}{x}$ csak x-től függ, így van x-től függő $M(x)$ multiplikátor, amelyre $\ln M(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{1}{x} + c$, tehát $M(x) = x$ jó multiplikátor. Ezzel felszorozva az egyenletet az

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) + (y - x)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenlethez jutunk. A megoldáshoz olyan $u(x,y)$ függvényre van szükségünk, amelyre $u_x = \frac{1}{x} - y$ és $u_y = y - x$, tehát $u(x,y) = \ln x - xy + \frac{1}{2}y^2$ megfelel. Így a megoldás az $\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$ implicit egyenlet által meghatározott y függvény.

b) $P_y = -e^{-y}, \ \ Q_x = e^{-y}$, tehát a differenciálegyenlet nem egzakt, és $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{-2e^{-y}}{xe^{-y} - 2ye^{-2y}} = \dfrac{-2}{x - 2ye^{-y}}$ nem csak x-től függ, tehát nincs $M(x)$ multiplikátor. Viszont $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = \dfrac{2e^{-y}}{e^{-y}} = 2$ csak (legföljebb) y-tól függ, tehát $N(y)$ multiplikátor létezik: $\ln N(y) = \int 2\,dy = 2y + c$ miatt $N(y) = e^{2y}$ megfelel. A differenciálegyenletet ezzel végigszorozva az

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$$

egzakt differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldását az $u(x,y) = xe^y - y^2$ függvényből az

$$xe^y - y^2 = C$$

implicit egyenlet adja.

3. Oldjuk meg a következő állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!
a) $y'' - 5y' + 6y = 0$
b) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
c) $y'' + 4y = 0$

▷ a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 - 5m + 6 = 0$, a gyökei 2 és 3 (mindegyik egyszeres, mert $m^2 - 5m + 6 = (m-2)(m-3)$), az általános megoldás $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

b) A karakterisztikus egyenlet $m^2 - 6m + 9 = 0$, azaz $(m-3)^2 = 0$, ennek egyetlen gyöke a 3, ami kétszeres gyök. Az általános megoldás $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Erre $y' = 3c_1e^{3x} + c_2(1+3x)e^{3x}$. A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$ és $3c_1 + c_2 = 2$, tehát $c_2 = -1$, így $y = e^{3x} - xe^{3x}$.

c) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 4 = 0$, a gyökei $\pm 2i$ (mindkettő egyszeres), a megoldása $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$.

4. Írjuk fel az általános megoldását annak a homogén, lineáris differenciálegyenletnek, amelynek karakterisztikus egyenlete $m^2(m-1)^3(m^2+1)$. Melyik ez a differenciálegyenlet?

▷ A karakterisztikus egyenlet gyökei 0 (2-szeres), 1 (3-szoros) és $\pm i$ (mindkettő egyszeres). Ebből az általános megoldás $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x + c_6\cos x + c_7\sin x$.

Gyakorló feladatok

1. Melyek egzaktak az alábbi differenciálegyenletek közül? Az egzaktakat oldjuk meg!
a) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$
b) $x(y^2+1) + y(1-x^2)y' = 0$
c) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0, \quad y(1) = 0$

2. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá és oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!
a) $(y\sin x - 1) + y'\cos x = 0$
b) $x(y^2+1) + y(1-x^2)y' = 0$

3. Oldjuk meg az $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletet!

A házi feladatok megoldása

1. a) Nem egzakt: $P(x,y) = y\sin x - 1$, $Q(x,y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$. Viszont elsőrendű lineáris. $y' + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$ alakban az y együtthatójának primitív függvénye $-\ln(\cos x)$, és így $e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$-szel beszorozva az $y'\frac{1}{\cos x} + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ differenciálegyenletet kapjuk, amelyben a bal oldal az $y\frac{1}{\cos x}$ deriváltja, tehát $\frac{y}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, és így $y = \sin x + C\cos x$.

b) Nem egzakt: $P_y = 2xy$, $Q_x = -2xy$.

c) Egzakt: $P_y = Q_x = -\sin y$. Az $u_x = 2x + \cos y$, $u_y = -x\sin y$ feltételeket kielégítő egyik u függvény $x^2 + x\cos y$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2 + x\cos y = C.$$

Az $y(1) = 0$ feltétel $1 + 1 = C$ esetén teljesül ($x = 1$, $y = 0$-t helyettesítünk az egyenletbe), tehát $x^2 + x\cos y = 2$, azaz

$$y = \arccos\frac{2 - x^2}{x}.$$

2. a) $P(x,y) = y\sin x - 1$, $Q(x,y) = \cos x$, $P_y = \sin x$, $Q_x = -\sin x$, tehát az egyenlet nem egzakt. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$ csak x-től függ, tehát van $M(x)$ multiplikátor. Erre

$$\ln M(x) = \int \frac{2\sin x}{\cos x}\,dx = -2\ln(\cos x) + c = \ln\frac{1}{\cos^2 x} + c,$$

tehát $M(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ megfelelő. Ezzel végigszorozva az egyenletet:

$$y\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + y'\frac{1}{\cos x} = 0,$$

ami már valóban egzakt. Az új egyenlethez tartozó $u(x,y)$ függvényre $u_x = y\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$, és $u_y = \frac{1}{\cos x}$, aminek az egyik megoldása $u = \dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x$, tehát a differenciálegyenlet y megoldása az $\dfrac{y}{\cos x} - \operatorname{tg} x = C$, azaz $y = \sin x + C\cos x$.

b) A differenciálegyenlet nem egzakt, $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4xy}{y(1-x^2)} = \dfrac{4x}{1-x^2}$ csak x-től függő, és így ad egy $M(x)$ multiplikátort, amelyre $\ln M(x) = \displaystyle\int \frac{4x}{1-x^2}\,dx = -2\ln(1-x^2) + c = \ln\frac{1}{(1-x^2)^2} + c$, vagyis ($c = 0$-val) $M(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$. Ezzel végigszorozva a differenciálegyenletet:

$$(y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{y}{1-x^2}y' = 0.$$

Ennek az egzakt differenciálegyenletnek a megoldását annak az $u(x,y)$ függvénynek a segítségével tudjuk kifejezni, amelyre

$$u_x = (y^2+1)\frac{x}{(1-x^2)^2} \text{ és } u_y = \frac{y}{1-x^2}.$$

Ennek az egyik megoldása $u = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$, így a differenciálegyenlet y megoldására

$$\frac{1+y^2}{1-x^2} = C, \text{ azaz } y = \pm\sqrt{C(1-x^2) - 1}.$$

3. A karakterisztikus egyenlet $m^4 + 2m^2 + 1 = 0$, azaz $(m^2+1)^2 = (m-i)^2(m+i)^2 = 0$, és ennek i (és $-i$ is) kétszeres gyöke. Tehát a megoldás $y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$.