Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit, milyen rendű, illetve fokú, homogén vagy inhomogén)!

a) $y' = 3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x$ b) $y'' = e^y \ln x$ c) $y'' = y^2 y' \cos x$

▷ a) Implicit, harmadrendű, elsőfokú, inhomogén.
b) Explicit, másodrendű, nincs foka.
c) Explicit, másodrendű, harmadfokú, homogén.

2. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $xyy' + y^2 - 1 = 0$
b) $(2x+1)y' - 3y = 0, \;\; y(4) = 6$

▷ a) A differenciálegyenlet $y \not\equiv \pm 1$ esetén $\frac{y'y}{y^2-1} = -\frac{1}{x}$ alakra hozható, amiből integrálással $\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\ln|x| + C$. Ezt tovább alakítva $\ln\sqrt{|y^2-1|} = \ln\frac{e^C}{|x|}$, azaz $y^2 - 1 = \pm\frac{e^{2C}}{x^2}$, vagyis $y = \pm\sqrt{1+\frac{A}{x^2}}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges választása a korábban talált $y \equiv \pm 1$ esetet is magában foglalja.
b) Ha $y \not\equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet $\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x+1}$ alakra hozható. Ebből $\ln|y| = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C$, tehát $y = A|2x+1|^{3/2}$ ($A \in \mathbb{R}$ tetszőleges). A kezdeti feltételt az $A = \frac{2}{9}$ paraméter elégíti ki, és $x = 4$ közelében $2x+1 > 0$, így a megoldás $y = \frac{2}{9}(2x+1)^{3/2}$.

3. Ha a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható, akkor $z = y/x$ függvény bevezetésével szétválaszthatóvá tehető. Oldjuk meg ennek segítségével az $2xyy' = y^2 - x^2, \;\; y(1) = 1$ kezdetiérték-problémát!

▷ xy-nal leosztva $2y' = (y/x) - \frac{1}{(y/x)}$, tehát a differenciálegyenlet $y' = g(y/x)$ alakra hozható. $z = (y/x)$ (azaz $y = zx$) helyettesítésnél $y' = z'x + z$, és így a $2z'x + 2z = z + \frac{1}{z}$ differenciálegyenlethez jutunk, amely szétválasztható, és a megoldása $z = \sqrt{\frac{A}{x} - 1}$, ahol $A \neq 0$, és ebből $y = x\sqrt{\frac{A}{x} - 1}$. Az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt $A = 2$-vel elégíti ki a megoldás, tehát a keresett függvény $y = x\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$.

4. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$
b) $y' + y = e^{-x}$

▷ a) Állandók variálásával: A homogén (szétválasztható) $y' - \frac{1}{x}y = 0$ differenciálegyenlet megoldása $y = Ax$, tehát az eredeti egyenlet megoldását $y = A(x)y$ alakban keressük. Ezt behelyettesítva a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy $A'(x)x + A(x) - A(x) = x^2$, amiből $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.
Másik megoldás: Az $y' + p(x)y = q(x)$ egyenletet $e^{P(x)}$-szel (ahol $P(x)$ az $p(x)$ primitív függvénye) beszorozzuk, és így a bal oldalon az $ye^{P(x)}$ deriváltját kapjuk. Ebben az esetben $e^P(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, és így $(y\frac{1}{x})' = x$, amiből $y\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 + C$, tehát $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.
b) Az a) részben említettek közül a második módszer szerint e^x-szel szorozzuk be az egyenletet: $(e^x y)' = 1$, amiből $e^x y = x + C$, tehát $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő (szétválasztható) differenciálegyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat!

a) $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$

b) $\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0$ az $y(\frac{1}{2}) = 0$, illetve az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltétellel

2. Vezessük vissza szétválasztható differenciálegyenletre, és így oldjuk meg a $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát!

3. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

a) $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 1$

b) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

Megoldások

1. a)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{1+y^2} &= -\frac{x}{1+x^2} \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,dy &= \int -\frac{x}{1+x^2}\,dx \\
\operatorname{arctg}(y) &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right) &= \operatorname{tg}\frac{A}{\sqrt{1+x^2}},
\end{aligned}$$

ahol $A = e^C > 0$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ vagy } y \equiv 0 \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad , \\
\ln|y| &= \sqrt{1-x^2} + C \\
y &= Ae^{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

ahol $A = \pm e^C$ tetszőleges nem 0 szám, vagy $A = 0$ a szinguláris megoldás miatt. Az $y(\frac{1}{2}) = 0$ kezdeti feltételt az $y \equiv 0$ megoldás, az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltételt az $y = e^{-4/5}e^{\sqrt{1-x^2}}$ megoldás elégíti ki.

2. A differenciálegyenlet $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ alakra hozható. $z = y/x$, azaz $y = zx$ helyettesítésnél $y' = z'x + z$.

$$\begin{aligned}
z'x + z &= e^z + z \\
z'e^{-z} &= \frac{1}{x} \\
\int e^{-z}\,dz &= \int \frac{1}{x}\,dx \\
-e^{-z} &= \ln|x| + C \\
z &= -\ln(-\ln|x| - C))
\end{aligned}$$

Mivel az $x = 1$ környékén érvényes megoldást keressük, a $z = -\ln(-\ln x - C)$ lesz a megfelelő. Ebből $y = -x\ln(-\ln x - C)$. Az $y(1) = 0$ feltételt a $C = -1$ elégíti ki: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

3. a) A megfelelő homogén differenciálegyenlet, $y' + y\cos x = 0$, azaz $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$ (ha $y \not\equiv 0$), és ebből $\ln|y| = C - \sin x$ azaz $y = Ae^{-\sin x}$, ahol $A \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)e^{-\sin x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe: $A'(x)e^{-\sin x} - A(x)(\cos x)e^{-\sin x} + A(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$, azaz $A'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x$, amiből $A'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x$. Ebből $A(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx = \int ue^u\,du$, ha $u = \sin x$ helyettesítést végzünk. Ez parciális integrálással: $\int ue^u\,du = ue^u - \int e^u\,du = (u-1)e^u + c = (-1 + \sin x)e^{\sin x} + c$, és $y = A(x)e^{-\sin x} = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$. A kezdeti feltételt az $y = -1 + \sin x + 2e^{-\sin x}$ függvény elégíti ki.

b) A megfelelő homogén differenciálegyenlet $\dfrac{y'}{y} = 1 + \dfrac{1}{x}$ alakra hozható ($y \not\equiv 0$ esetén, és a megoldása $\ln|y| = x + \ln|x| + C$, azaz $\ln|y| = \ln e^x e^C|x|$, tehát $y = Axe^x$. Az inhomogén differenciálegyenlet megoldását az állandó variálásával $y = A(x)xe^x$ alakban keressük. Behelyettesítés után

$$A'(x)x^2e^x + A(x)xe^x + A(x)x^2e^x - (x+1)A(x)xe^x = x^2 - x^3, \text{ azaz}$$

$$A'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \text{ és így}$$

$$A(x) = \int e^{-x} - xe^{-x}\,dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + c, \text{ tehát}$$

$$y = x^2 + cxe^x.$$