## Órai feladatok

**1.** Számítsuk ki az $f(z)$ függvény integrálját a megadott $\mathcal{G}$ görbe mentén:

a) $f(z) = \mathrm{Re}(z+z^2)$, $\mathcal{G}$ a $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$ egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az $x$ növekedésének iránya;

b) $f(z) = 3z^2 + 2z$, $\mathcal{G}$ az $1-i$, $2-i$, $2+i$ pontokat összekötő törtvonal.

c) $f(z) = iz^2 - 2\bar{z}$, $\mathcal{G}:\ |z| = 2$, $\mathrm{Re}\, z \ge 0$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, a kör negatív irányítása szerint.

▷ a) $z(t) = t + it^2$, ahol $0 \le t \le 1$. $z'(t) = 1 + 2ti$, $f(z(t)) = t + t^2 - t^4$, és $\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = \int_0^1 (t + t^2 - t^4) + 2i(t^2 + t^3 - t^5)\, dt = \frac{19}{30} + \frac{5}{6}i$.

b) $f$-nek van primitív függvénye, $z^3 + z^2$, így $\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = \left[z^3 + z^2\right]_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$.

c) $z(t) = 2e^{it}$ $(\frac{\pi}{2} \ge t \ge 0)$, $z'(t) = 2ie^{it}$, $f(z(t)) = 4ie^{2it} - 4e^{-it}$, $\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = \int_{\pi/2}^0 -8e^{3it} - 8i\, dt = -\frac{8}{3} + (\frac{8}{3} - 4\pi)i$.

**2.** A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a) $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2 + iz}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív körüljárással;

b) $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\mathrm{ch}\, z}{z^5}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ egy origó középpontú kör, negatív körüljárással;

c) $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz$, ahol$\mathcal{G}$ a $|z - 2| = 3$ egyenletű kör, pozitív irányban;

d) $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\, dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $-2, 1+2i, 1-2i$ csúcsú háromszögvonal.

▷ a) Az integrandus szingularitásai 0 és $-i$, ezek közül csak $-i$ van a kör belsejében. Így az integrál a Cauchy-féle integrálformula szerint $\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{\cos z}{z}}{z+i}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{\cos z}{z}\Big|_{z=-i} = -2\pi\, \mathrm{ch}\, 1$.

b) Negatív a körüljárás, így az integrál $-\frac{2\pi i}{4!}(\mathrm{ch}\, z)^{(4)}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi}{12}i$

c) Az integrandus szingularitásai 0 és 1, mindkettő a kör belsejében van. Legyen $\mathcal{G}_0$ és $\mathcal{G}_1$ a két szingularitást körüljáró, a $\mathcal{G}$ belsejében levő, egymást nem metsző két kör, a $\mathcal{G}$-vel megegyező, tehát pozitív irányítással. $\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{e^z(z-1)^2 - 2e^z(z-2)}{(z-1)^3}\Big|_{z=0} = -5\pi i$, $\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}\, dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{e^z}{z^3}\Big|_{z=1} = 2\pi e i$. Összesítve $\oint_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = (2\pi e - 2\pi)i$.

d) Az integrandus szingularitásai $i$ és $-1$, mindkettő benne van a megadott (negatív irányítású) háromszögtartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy $i$ körüli, $\mathcal{G}_{-1}$ egy $-1$ körüli negatív irányítású kis kör.

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\, dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1}}{(z-i)^2}\, dz = -\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^{\pi z}}{z+1}\right)'\Big|_i = -2\pi i \frac{\pi e^{\pi z}(z+1) - e^{\pi z}}{(z+1)^2}\Big|_i = -2\pi i \frac{-\pi(1+i)+1}{(1+i)^2} = (\pi^2 - \pi) + \pi^2 i.$$

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_{-1}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+1}\,dz = -\frac{2\pi i}{0!}\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\Big|_{-1} = -\pi e^{-\pi}.$$

Így $\mathcal{G}$-n az integrál $(\pi^2 - \pi - \pi e^{-\pi}) + \pi^2 i$.

## Gyakorló feladatok

**1.** Számítsuk ki az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvény integrálját a $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ körív mentén, pozitív forgásiránnyal;

**2.** A Cauchy-féle integrálformula segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

c) $\displaystyle\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz$, ahol $\mathcal{G}:\ |z-1| = \frac{3}{2}$, pozitív irányban;

e) $\displaystyle\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{1}{1+z^2}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör, pozitív irányban;

g) $\displaystyle\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3}\,dz$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitív irányban.

## Megoldások

**1.** $z(t) = 2e^{it}$ $(\pi \leq t \leq 2t)$, $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}}(2ie^{it})\,dt = \int_{\pi}^{2\pi} 2ie^{it} + 2i\,dt = \left[2e^{it} + 2it\right]_{\pi}^{2\pi} =$ $2e^{2\pi i} - 2e^{\pi i} + 2\pi i = 2 - (-2) + 2\pi = 4 + 2\pi i.$

**2.** c) Az integrandus szingularitásai $0, \pm 1$ (a nevező $z(z-1)(z+1)$, a számláló pedig reguláris), és ezek közül 0 és 1 vannak a körön belül, tehát az integrált helyettesíthetjük egy 0 körüli ($\mathcal{G}_0$) és egy 1 körüli ($\mathcal{G}_1$) kis körön vett integrál összegével.

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_0} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2-1}\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_1} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_0} \frac{\frac{1}{z^2+z}}{z-1}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z^2+z}\Big|_{z=1} = \pi i.$$ Így $\mathcal{G}$-n az integrál $-2\pi i + \pi i = -\pi i$.

e) Az integrandus szingularitásai $\pm i$ (a nevező $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, a számláló reguláris), és mindkettő benne van a görbe által bezárt tartományban. Legyen $\mathcal{G}_i$ egy $i$ körüli, $\mathcal{G}_{-i}$ egy $-i$ körüli kis kör.

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z+i}\Big|_{i} = \pi.$$

$$\oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz = \oint\limits_{\mathcal{G}_i} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\frac{1}{z-i}\Big|_{i} = -\pi.$$ Így a $\mathcal{G}$-n az integrál 0.

g) Az integrandus egyetlen szingularitása $\frac{\pi i}{2}$, és ez az ellipszis belsejébe esik, mert $|-1+\frac{\pi i}{2}| + |1+\frac{\pi i}{2}| = 2\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} < 4$. $\displaystyle\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi i}{2})^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{\pi i/2} = \pi i(-\sin z)\Big|_{\pi i/2} =$ $-\pi i \sin\dfrac{\pi i}{2} = \pi \operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}.$