Órai feladatok

1. Írjuk fel az $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ függvényt $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.

▷ $z^2 + \frac{1}{z} = (x+yi)^2 + \frac{1}{x+yi} = x^2 - y^2 + 2xyi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = (x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+y^2} + i(2xy - \frac{y}{x^2+y^2})$

2. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket!

a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ b) $e^{1-i\arcsin(1/3)}$ c) $\operatorname{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4})$ d) $\sin(1+i)$

▷ a) $e^{5+\frac{\pi}{2}i} = e^5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^5 i$

b) $e^{1-i\arcsin(1/3)} = e(\cos(-\arcsin(1/3)) + i\sin(-\arcsin(1/3))) = e\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}i\right) = \dfrac{2\sqrt{2}e}{3} - \dfrac{e}{3}i.$

c) $\operatorname{ch}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(e^{\ln 3 + i(\pi/4)} + e^{-\ln 3 - i(\pi/4)}) = \frac{1}{2}(3(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) + \frac{1}{3}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))) = \frac{5\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i.$

d) $\sin(1+i) = \sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i = \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1$

3. Adjuk meg az $\ln(-5+5i)$ szám összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

▷ $-5+5i = 5\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, így a logaritmusa $\ln(5\sqrt{2}) + i(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$, a logaritmus főértéke pedig $\ln(5\sqrt{2}) + \frac{3}{4}\pi i$.

4. Keressük meg a $\sin z = -2$ egyenlet összes megoldását a komplex számok körében!

▷ Felhasználva a $\sin z = \operatorname{sh}(iz)/i = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ összefüggést, és az egyenletet ie^z-vel beszorozva és 0-ra rendezve azt kapjuk, hogy $(e^{iz})^2 + 4ie^{iz} - 1 = 0$, tehát $e^{iz} = \frac{-4i \pm \sqrt{-12}}{2} = (-2 \pm \sqrt{3})i$. Ennek az abszolútértéke $2 \mp \sqrt{3}$, és így a trigonometrikus alakja $(2 \mp \sqrt{3})(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$, a logaritmusa $iz = \ln(2 \mp \sqrt{3}) + i(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$, tehát $z = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi - i\ln(2 \mp \sqrt{3})$.

5. Számítsuk ki az $(i+1)^i$ hatvány értékeit!

▷ $(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)}$, ahol $\ln(i+1) = \ln(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \frac{\ln 2}{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, tehát $(i+1)^i = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi) + i(\ln 2)/2} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2})$.

6. Differenciálhatók-e valahol az $f(x) = |z|^2$ komplex függvény? Ahol differenciálható, ott adjuk is meg a deriváltat!

▷ $f(x+yi) = |x+yi|^2 = x^2 + y^2$ (ahol $x, y \in \mathbb{R}$), tehát $u(x,y) = x^2 + y^2$ és $v(x,y) = 0$. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint $2x = u_x = v_y = 0$, és $2y = u_y = -y_x = 0$, ahol f differenciálható, tehát csak a $0 + 0i = 0$ helyen differenciálható a függvény, és ott a deriváltja $u_x + iv_x = 0$.

7. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényt, amelyre $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

▷ $v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, és $v_y = u_x = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2}$. $v(x,y)$ a (v_x, v_y) vektor-vektorfüggvény potenciálfüggvénye, tehát $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + C$. Ebből

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + Ci = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + Ci = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} + Ci = \frac{1}{z} + Ci$$

Gyakorló feladatok

1. Írjuk fel az $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ függvényt $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban.

2. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex függvényértékeket!

a) $\operatorname{sh}(1 - \frac{\pi}{3}i)$ b) $\cos(-i)$ c) $\operatorname{tg} \frac{i\pi}{2}$

3. Adjuk meg a következő komplex számok összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

a) $\ln(-e)$. b) $\ln(\sqrt{3} + i)$

4. Oldjuk meg az egyenleteket a komplex számok körében!

a) $\operatorname{tg} z = -i$ b) $\cos z = i\sqrt{3}$

5. Számítsuk ki a következő hatványokat!

a) i^i b) 2^{5i} c) $i^{1/2}$

6. Hol differenciálható a $\cos \bar{z}$ függvény?

7. Határozzuk meg azt a reguláris $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényt, amelyre $v(x,y) = 2y(x+1)$ és $f(i) = 2i - 1$.

Megoldások

1. $f(x+yi) = \dfrac{x+yi+1}{x+yi-1} = \dfrac{x+1+yi}{x-1+yi} = \dfrac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-1-2yi}{(x-1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$.

2. a) $\operatorname{sh}(1-\frac{\pi}{3}i) = \frac{1}{2}(e^{1-(\pi/3)i} + e^{-1+(\pi/3)i}) = \frac{1}{2}(e(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{e}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) = \frac{1}{4}(e - \frac{1}{e}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(e + \frac{1}{e})i$.

b) $\cos(-i) = \operatorname{ch}(-1) = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$

c) $\operatorname{tg}\dfrac{i\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \dfrac{i\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} = i\operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}$

3. a) A $-e$ szám trigonometrikus alakja $e(\cos\pi + i\sin\pi)$, így $\ln(-e) = \ln e + i(\pi + 2k\pi)i = 1 + (2k+1)\pi i$, a logaritmus főértéke pedig $1 + \pi i$.

b) $\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, így $\ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, a logaritmus főértéke pedig $\ln 2 + i\frac{\pi}{6}$.

4. a) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{-i\operatorname{sh}(iz)}{\operatorname{ch}(iz)} = -i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$, így a $\operatorname{tg} z = -i$ egyenlet $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ alakra hozható, ami az $e^{-iz} = 0$ egyenlettel ekvivalens, és ennek nincs megoldása.

b) $\cos z = i\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ch} iz = i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = i2\sqrt{3} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - i2\sqrt{3}e^{iz} + 1 = 0$. Ebből $e^{iz} = \dfrac{i2\sqrt{3} \pm \sqrt{-12-4}}{2} = i\sqrt{3} \pm 2i = i(\sqrt{3} \pm 2)$. Az első megoldás trigonometrikus alakja $(2+\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, amiből $iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3})$, a másodiké $(2-\sqrt{3})(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$, amiből $iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3})$.

5. a) $i^i = e^{i\ln i}$, ahol $\ln i = \ln(1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})) = 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, és így $i^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$. (A hatvány főértéke ott van, ahol a logaritmus főértékét vesszük, tehát i^i főértéke $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) $2^{5i} = e^{5i\ln 2}$, ahol $\ln 2$-t mint komplex logaritmust értjük (tehát végtelen sok különböző értéke van): $\ln 2 + 2k\pi i$ (és itt már $\ln 2$ a valós logaritmust jelenti). Tehát $2^{5i} = e^{-10k\pi + i5\ln 2} = e^{-10k\pi}(\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2))$.
c) $i^{1/2} = e^{(1/2)\ln i} = e^{(i/2)(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)} = \cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$. (Ez természetesen megegyezik az i két négyzetgyökével, mert a hatványazonosságok érvényessége miatt az $\frac{1}{n}$-edik hatvány a komplex számoknál is az n-edik gyököket jelenti.)

6. $\cos(\overline{x+yi}) = \cos(x-yi) = \cos x\cos(yi) + \sin x\sin(yi) = \cos x\operatorname{ch} y + i\sin x\operatorname{sh} y = u(x,y) + iv(x,y)$. A kapott $u(x,y) = \cos x\operatorname{ch} y$ és $v(x,y) = \sin x\operatorname{sh} y$ kétváltozós függvények mindegyike differenciálható. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek szerint az$f$ függvény differenciálhatósághoz az kell még, hogy $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$ legyen. $u_x = -\sin x\operatorname{ch} y$, $v_y = \sin x\operatorname{ch} y$, $u_y = \cos x\operatorname{sh} y$, és $v_x = \cos x\operatorname{sh} y$, tehát a két egyenlet csak akkor teljesülhet egyszerre, ha $\sin x\operatorname{ch} y = \cos x\operatorname{sh} y = 0$. De $\operatorname{ch} y \geq 1$ minden y-ra, tehát $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, és a második egyenletből $\operatorname{sh} y = 0$ miatt $y = 0$. Így a függvény a $z = k\pi$ helyeken differenciálható, és itt a deriváltja $u_x + iv_x = 0$.

7. $u_x = v_y = 2(x+1)$, és $u_y = -v_x = -2y$. Így $u(x,y) = \int 2(x+1)\,dx = (x+1)^2 + g(y)$, amiből $u_y = g'(y) = -2y$, tehát $g(y) = -y^2 + C$, és $u(x,y) = (x+1)^2 - y^2 + C$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + C + 2y(x+1)i$. Az $f(i) = 2i-1$ feltétel miatt $2i-1 = 1-1+C+2i$, tehát $C = -1$, és $f(x+yi) = (x+1)^2 - y^2 + 2y(x+1)i - 1$. (A függvényt kifejezhetjük z-vel is: $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi = z^2 + 2z$.)