Órai feladatok

1. Számítsuk ki a $z-x$ skalárértékű függvény felületi integrálját az $\mathcal{F}:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$ kúpfelületen.

▷ $\mathbf{r}=(u\cos v,\ u\sin v,\ u)$, ahol $0\le u\le 1$ és $0\le v\le 2\pi$. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$, $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|=\sqrt{2}|u|=\sqrt{2}u$, ha $0\le u$, és $z-x=u-u\cos v$. Az integrál $\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}u^2-\sqrt{2}u^2\cos v\,dv\,du=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

2. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x,-y,z)$ vektorértékű függvény felületmenti integrálját az $\mathcal{F}$: $\mathbf{r}(u,v)=(u+2v,v,u-v)$, $0\le u\le 3, 0\le v\le 1$ felületen felfelé mutató normálvektorokkal.

▷ $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-1,3,1)$ fölfelé mutató, $\mathbf{F}(u,v)=(u+2v,\ -v,\ u-v)$, és az integrál $\int\limits_0^1\int\limits_0^3-6v\,du\,dv=-9$.

3. Számítsuk ki az $\iint\limits_{\mathcal{F}}(xz,xy,yz)\mathbf{n}\,d\sigma$ integrált, ahol az $\mathcal{F}:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ és a $z=0$ sík által határolt térbeli tartomány teljes felülete, befelé mutató normálvektorokkal.

▷ Gauss–Osztrogradszkij-tétellel: $\operatorname{div}\mathbf{F}=x+y+z$, és az $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$ félgömbtartományon kell integrálni. Gömbi koordinátákkal: $\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}(\rho\sin\varphi\cos\vartheta+\rho\sin\varphi\sin\vartheta+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\vartheta\,d\varphi\,d\rho=\frac{\pi}{4}$. Viszont a befelé mutató normálvektorok miatt az eredeti integrál ennek a negatívja: $-\frac{\pi}{4}$.

4. A Stokes-tétel felhasználásával számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(y^2,z^2,x^2)$ függvény integrálját az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ és $C(0,0,1)$ pontokon, majd újra az A ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén.

▷ $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}=(-2z,-2x,-2y)$, és ezt az $x+y+z=1$ síkon levő (tehát $(1,1,1)$ normálvektorú) felületdarabon kell integrálni. A felület vetülete az xy-síkra a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcsok által határolt T háromszögtaromány. Így az integrál $\iint\limits_T(-2(1-x-y),-2x,-2y)(1,1,1)/|(1,1,1)(0,0,1)|\,dy\,dx=\iint\limits_T-2\,dy\,dx=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$ (mivel konstans függvényt kellett integrálni, elég volt a területtel megszorozni a függvényértéket).

5. A Green-tétel segítségével számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(2x^2+2y^2,\ (x+y)^2)$ függvény integrálját az $A(1,1)$, $B(2,2)$ és $C(1,3)$ csúcsokon keresztülmenő zárt háromszögvonal mentén.

▷ A $\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2-\frac{\partial}{\partial y}(2x^2+2y^2)=2x-2y$ függvényt kell integrálni a háromszögtartományon: $\int\limits_1^2\int\limits_x^{4-x}2x-2y\,dy\,dx=-\frac{4}{3}$

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a z^2 függvény felületi integrálját az $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$ félgömbfelületen.

2. Számítsuk ki a $\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$ függvény integrálját, a $\mathcal{F}: \mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, 2)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ felületen.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(xe^z,\ y^2,\ -2yz)$ függvény felületmenti integrálját a $z=x^2+y^2$ paraboloid és a $z=4$ sík által határolt korlátos tartomány teljes felületén, kifelé mutató normálvektorokkal.

4. Számítsuk ki Stokes-tétellel és anélkül a $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(x, x+y, x+y+z)$ függvény integrálját az $x^2+y^2=4$, $z=2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

Megoldások

1. $\nabla g=(2x,2y,2z)$, $|\nabla g|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$ a felületen, míg az xy-sík $\mathbf{p}=(0,0,1)$ normálvektorával $\nabla g\cdot\mathbf{p}=2z=2\sqrt{4-x^2-y^2}$ a felületen, végül az integrálandó függvény $z^2=4-x^2-y^2$. Ebből az integrál $\iint_{x^2+y^2\leq 4}(4-x^2-y^2)\frac{4}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$ $\iint_{x^2+y^2\leq 4}2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 2\sqrt{4-r^2}r\,dr\,d\vartheta=\frac{32}{3}\pi$.

2. $\mathbf{r}_u=(\cos v,\sin v,0)$, $\mathbf{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$
$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(0,0,u)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))=(u\cos v, u\sin v, 2)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)=2u$
Ebből az integrál $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 2u\,du\,dv=\frac{\pi}{2}$,

3. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint az integrál megegyezik $\operatorname{div}\mathbf{F}=e^z+2y-2y=e^z$ integráljával a paraboloid és a sík által határolt térbeli tartományon. A tartomány vetülete az xy-síkra a metszetkör vetülete, azaz az origó körüli 2 sugarú kör. Hengerkoordinátákkal felírva az integrált: $\int_0^2\int_{r^2}^4\int_0^{2\pi} e^z r\,d\vartheta\,dz\,dr=\int_0^2\int_{r^2}^4 2\pi r e^z\,dz\,dr=\int_0^2\left[2\pi r e^z\right]_{r^2}^4\,dr=$ $\int_0^2 2\pi r e^4-2\pi r e^{r^2}\,dr=\left[\pi r^2 e^4-\pi e^{r^2}\right]_0^2=3\pi e^4+\pi$.

4. $\mathbf{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 2)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=(2\cos t,\ 2\cos t+2\sin t,\ 2+2\cos t+2\sin t)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)=4\cos^2 t$,
$\int_{\mathcal{G}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\ \mathbf{dr}=\int_0^{2\pi}4\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}2+2\cos 2t\,dt=\left[2t+\sin 2t\right]_0^{2\pi}=4\pi$.
vagy Stokes-tétellel:
$\mathbf{rot}(\mathbf{F})=(1,-1,1)$,
és a sík $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,2)$ paraméterezéséhez a normálvektor $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=(0,0,1)$, a paramétertartomány pedig $x^2+y^2\leq 4$
$\iint_{\mathcal{F}}(1,-1,1)(0,0,1)\,d\sigma=\iint_{\mathcal{F}}1\,d\sigma$, ez pedig az $x^2+y^2\leq 4$ kör területe, azaz 4π.