Órai feladatok

1. Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények divergenciáját és rotációját!
a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{x},\ xz\right)$
b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$

▷ a) $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + x$ és $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(0,\ -z,\ -\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right)$.
b) $\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}| = \mathbf{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$,
amiből $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, és $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, mert $\mathbf{F}$ egy függvény gradiense, tehát potenciálos, és potenciálos függvény rotációja $\mathbf{0}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(g\cdot\mathbf{F}) = (\mathbf{grad}\,g)\cdot\mathbf{F} + g\cdot\operatorname{div}\mathbf{F}$.

▷ $\mathbf{F} = (P,Q,R)$-re $\operatorname{div}(g\mathbf{F}) = \operatorname{div}(gP,\ gQ,\ gR) = g_xP + gP_x + g_yQ + gQ_y + g_zR + gR_z$, és a jobb oldal is ezzel egyenlő.

3. Lássuk be, hogy az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x+6xz,\ -2y,\ 3x^2-3z^2)$ vektormező forrásmentes és örvénymentes is!

▷ $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ és $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$

4. Paraméterezzük azt a kúppalástot, amelynek alapja az $x^2+y^2=1$, $z=0$ egyenletekkel megadott kör, csúcsa pedig $A(1,2,3)$.

▷ A kúppalástot lefedhetjük a csúcsot a kör pontjaival összekötő szakaszokkal. A kör egy tetszőleges pontja $P(\cos u, \sin u, 0)$, és az AP szakaszt v-vel paraméterezve a kúppalást tetszőleges pontjának helyvektorára az
$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{AP} = (1-v+v\cos u,\ 2-2v+v\sin u,\ 3-3v)$ kifejezést kapjuk, ahol $0\le u\le 2\pi$ és $0\le v\le 1$.

5. Írjuk fel a következő felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!
a) $\mathbf{r} = (uv,\ \frac{u}{v},\ \sqrt{u})$ az $(u,v) = (4,1)$ paraméterű pontban;
b) $x^3+xy^2+3yz^3 = 5$ az $(1,1,1)$ pontban.

▷ a) $\mathbf{r}_u = (v, \frac{1}{v}, \frac{1}{2\sqrt{u}})$, $\mathbf{r}_v = (u,\ -\frac{u}{v^2},\ 0)$, az adott pontban $\mathbf{r}_u = (1,1,\frac{1}{4})$ és $\mathbf{r}_v = (4,-4,0)$. Ebből a normálvektor $(1,1,-8)$, a megadott pont $\mathbf{r}(4,1) = (4,4,2)$, és az érintősík $x+y-8z=-8$. b) A felület a $g(x,y,z) = x^3+xy^2+3yz^3$ függvény nívóhalmaza, így normálvektora $\mathbf{grad}\,g = (3x^2+y^2,\ 2xy+3z^3,\ 9yz^2)$, ami az $(1,1,1)$ pontban $(4,5,9)$, és a sík egyenlete $4x+5y+9z=18$.

6. Számítsuk ki a következő felületdarabok felszínét!
a) $\mathbf{r}(u,v) = (u^2, 2u\cos v, 2u\sin v)$, $\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le\frac{\pi}{2}$;
b) Az $x^2+y^2+z^2=2$ gömbből a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ kúp által kimetszett rész.

▷ a) $\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,\mathrm{u}\,\mathrm{v}\ \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 4u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{u}\,\mathrm{v} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi$. b) A kúp és a gömb metszete az $x^2+y^2=1$, $z=1$ kör, tehát a felületdarab vetülete az xy-síkra az $x^2+y^2\le 1$ kör. A $\iint\frac{|\nabla g|}{|(\nabla g)\mathbf{p}|}\,dA$ képletet használva, ahol $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, és $\mathbf{p} = (0,0,1)$ a vetület síkjának egységnyi normálvektora: $|\nabla g| = |(2x,2y,2z)| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2}$ a gömbfelületen, $|(\nabla g)\mathbf{p}| = |2z| = 2\sqrt{2-x^2-y^2}$, és a felszín $\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} r\,d\vartheta\,dr = (4-2\sqrt{2})\pi$. Másképp: a gömbsapka paraméterezése $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = (\sqrt{2}\sin\varphi\cos\vartheta,\ \sqrt{2}\sin\varphi\sin\vartheta,\ \sqrt{2}\cos\varphi)$, ahol $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, $|\mathbf{r}_\varphi\times\mathbf{r}_\vartheta| = 2\sin\varphi$, és a felszín $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} 2\sin\varphi = (4-2\sqrt{2})\pi$.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a divergenciát és a rotációt!
a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2+y^3,\ 12xy-3x,\ xyz^2)$
b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\times(1,1,1)$

2. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} - \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,G)$.

3. Paraméterezzük a $z=y^2$ görbe y körüli forgatásával kapott felületet!

4. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v) = (u, \cos u\sin v, \cos u\cos v)$ felület normálvektorát az $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjában!

5. Adjuk meg az $xy^2+z^3=12$ felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(1,2,2)$ pontban!

6. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u+v)$, $0\le u\le\pi$, $0\le v\le 1$ felületdarab felszínét!

Megoldások

1. a) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x+12y+2xyz$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (xz^2,\ -yz^2,\ 12y-3-3y^2)$ b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (-2,-2,-2)$.

2. Legyen $\mathbf{F} = (F_1,F_2,F_3)$, és $\mathbf{G} = (G_1,G_2,G_3)$ $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \operatorname{div}(F_2G_3-F_3G_2,\ F_3G_1-F_1G_3,\ F_1G_2-F_2G_1) =$

$$\Big((F_2)_xG_3 + F_2(G_3)_x - (F_3)_xG_2 - F_3(G_2)_x\Big)+$$
$$\Big((F_3)_yG_1 + F_3(G_1)_y - (F_1)_yG_3 - F_1(G_3)_y\Big)+$$
$$\Big((F_1)_zG_2 + F_1(G_2)_z - (F_2)_zG_1 - F_2(G_1)_z\Big) =$$
$$\Big((F_3)_y-(F_2)_z\Big)G_1 + \Big((F_1)_z-(F_3)_x\Big)G_2 + \Big((F_2)_x-(F_1)_y\Big)G_3+$$
$$F_1\Big((G_2)_z-(G_3)_y\Big) + F_2\Big((G_3)_x-(G_1)_z\Big) + F_3\Big((G_1)_y-(G_2)_x\Big) =$$
$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} + \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,\mathbf{G}).$$

3. $\mathbf{r}(y,\varphi) = (y^2\sin\varphi, y, y^2\cos\varphi)$, $y\in\mathbb{R}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

4. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

5. $\nabla(xy^2+z^3-12) = (y^2, 2xy, 3z^2)$, így az érintősík normálvektora $(4,4,12)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,1,3)$, és a sík egyenlete $x+y+3z=9$.

6. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = (-v\sin u, v\cos u, -v)$, $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v| = v\sqrt{2}$, a felszín $\pi/\sqrt{2}$.