Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $f(\mathbf{r}) = xy + xz$ függvény integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^2+1)$ görbe mentén $t_1 = 0$-tól $t_2 = 1$-ig!

▷ $\int\limits_0^1 t(1+2t^2)\sqrt{1+8t^2}\,\mathrm{d}t = 93/40 = 2{,}325$ ($u = 1+8t^2$ helyettesítéssel a határozatlan integrál $\frac{1}{20}t^2(8t^2+1)^{3/2} + \frac{3}{80}(8t^2+1)^{3/2}$).

2. Számítsuk ki az $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ függvény integrálját az $\mathbf{r} = (2\cos\frac{s}{2}, 1 + 2\sin\frac{s}{2})$ ívhossz-paraméteresen megadott görbén a 0 és π paraméterértékek között!

▷ $\int\limits_0^\pi 5 + 4\sin\frac{s}{2}\,\mathrm{d}s = 5\pi + 8.$

3. Számítsuk ki a $\int\limits_{\mathcal{G}} x + y + z\,\mathrm{d}s$ integrál értékét, ha $\mathcal{G}$ az $A(1,2,3)$ és $B(0,-1,1)$ pontokat összekötő szakasz!

▷ $\mathbf{r}(t) = (1-t, 2-3t, 3-2t)$, $0 \le t \le 1$, és $\int\limits_{\mathcal{G}} x + y + z\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (6-6t)\sqrt{14}\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{14}$.

4. Egy változó vastagságú hajlított rúd tömegközéppontját szeretnénk meghatározni. A keresztmetszetek középpontját összekötő görbe $\mathcal{G}$: $\mathbf{r}(t) = (0, t^2-1, 2t)$, ahol $-1 \le t \le 1$. A középpontokra koncentrált sűrűséget ($\mathrm{d}m/\mathrm{d}\ell$ értelemben, ahol Δm a $\Delta\ell$ hosszúságú rúddarab tömege), a $\rho(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ függvény adja meg. Adjuk meg a tömegközéppont koordinátáit!

▷ $M = \int\limits_{\mathcal{G}} \rho\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^1 30(1+t^2)\,\mathrm{d}t = 80$ a tömeg, $M_x = \int\limits_{\mathcal{G}} x\rho\,\mathrm{d}s = 0$, $M_y = \int\limits_{\mathcal{G}} y\rho\,\mathrm{d}s = -48$, $M_z = \int\limits_{\mathcal{G}} z\rho\,\mathrm{d}s = 0$, amiből a tömegközéppont koordinátái $\bar{x} = M_x/M = 0$, $\bar{y} = M_y/M = -\frac{3}{5}$ és $\bar{z} = M_z/M = 0$, tehát a tömegközéppont $(0, -\frac{3}{5}, 0)$.

5. Határozzuk meg az $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, x^2, y)$ vektorértékű függvény integrálját az $\mathbf{r}(t) = (1, 3t, 4t)$ görbe mentén a $t_1 = 0$-tól $t_1 = 1$-ig!

▷ $\int_0^1 3 + 12t\,\mathrm{d}t = 9.$

6. Számítsuk ki az $(x,y) \mapsto (-y,x)$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön pozitív irányítás mellett!

▷ $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\int\limits_{\mathcal{G}} \mathbf{F}\,\mathbf{dr} = \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

7. Keressünk potenciálfüggvényt a megadott $\mathbf{F}$ vektor-vektorfüggvényhez, és számítsuk ki ennek segítségével az $\mathbf{F}$ integrált a $\mathcal{G}$ görbén, ha

a) $\mathbf{F} = (2xy, x^2, 1)$, $\mathcal{G}$ az $A(1,1,1)$ pontból a $B(1,-1,2)$ pontba menő tetszőleges görbe;
b) $\mathbf{F} = (y+z, x+z, x+y)$ és $\mathcal{G}$: $\mathbf{r}(t) = (\frac{t}{t+1}, \sqrt{t^2+1}, 1+t)$, $(0 \le t \le 1)$.

▷ a) $f(x,y,z) = x^2y + z$ potenciálfüggvény, és az integrál értéke $f(1,-1,2) - f(1,1,1) = -1$.
b) Az $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ potenciálfüggvény, és az integrál értéke $[f(\mathbf{r})]_A^B = f(B) - f(A)$, ahol $A = \mathbf{r}(0) = (0,1,1)$, $B = \mathbf{r}(1) = (1/2, \sqrt{2}, 2)$, és ebből az integrál $5\sqrt{2}/2$.

8. Van-e potenciálfüggvénye az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xy, x+y, xz)$ függvénynek?

▷ Nincs. Például mert ha $f'_x = xy$, akkor $f = \frac{1}{2}x^2y + g(y,z)$ valamely kétváltozós $g(y,z)$ függvényre, és így $f'_y = \frac{1}{2}x^2 + g'_y(y,z) = x+y$ ellentmondást ad ($g'_y(y,z) = x - \frac{1}{2}x^2 + y$ függ x-től). Másképp: az $\mathbf{F} = (M, N, P)$ jelölést használva nem teljesülnek a komponens-teszt feltételei, pl. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ (ez a később bevezetendő **rot** jelöléssel azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (0, -z, 1-x) \not\equiv \mathbf{0}$).

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $\int_{\mathcal{G}} x - 1\,\mathrm{d}s$ integrált a $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, 1)$ görbén $t_0 = 0$-tól $t_1 = 3$-ig!

2. Mennyi az $\int_{\mathcal{G}} f\,\mathrm{d}s$ integrál értéke, ha $f(x,y) = x^2 - y^2$, és $\mathcal{G}$ az $x^2 + y^2 = 4$ kör $(2,0)$-tól $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$-ig tartó íve?

3. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ függvény gradiensét!

4. Számítsuk ki az $\mathbf{F} = \left(\dfrac{1}{1+y}, x^2, y^2 - z\right)$ függvény integrálját a $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^4)$ $(0 \leq t \leq 1)$ görbén!

5. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = e^{y+2z}(1, x, 2x)$ függvény potenciálfüggvényét, és számítsuk ki az integrálját az $(1,1,1)$ pontot a $(2,3,3)$ ponttal összekötő szakaszon!

Megoldások

1. $\int_0^3 (t-1)\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{46}{15}$.

2. $\int_0^{\pi/4} 8\cos^2 t - 8\sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} + 2t^3\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

5. Egy potenciálfüggvény $f(x,y,z) = xe^{y+2z}$, az integrál pedig $2e^9 - e^3$.