

Órai feladatok

1. Milyen görbét írnak le a következő függvények?

a) $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$;

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2 + t^2, 1 - 4t^2)$.

▷ Csavarvonal és félegyenes.

2. (Térbeli kör leírása) Paraméterezzük az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és az $x + 2y = 0$ felületek metszetgörbét.

▷ $\mathbf{r}(t) = (-\frac{4}{\sqrt{5}} \cos t, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Számítsuk ki a határértékeket! Vizsgáljuk meg a vektorfüggvények folytonosságát is!

a) $\lim_{t \rightarrow 0} (t^2, \frac{\sin t}{t}, 1)$

b) $\lim_{t \rightarrow 3} (e^{\frac{1}{t-3}}, t^3, t)$

▷ a) $(1, 1, 1)$ b) nincs limesze, de balról $t \rightarrow 3^-$ esetén $(0, 27, 3)$ -hoz, $t \rightarrow 3^+$ esetén $(+\infty, 27, 3)$ -hoz tart. Az adott helyen mindegyiknek szakadása van, de mindenhol máshol folytonos.

4. Számítsuk ki az 1. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet.

▷ a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{5}$; b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t(1, 1, -4)$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 6\sqrt{2}|t|$.

5. Milyen görbét ír le az $\mathbf{r}(t) = (t^3, \sqrt{t^6})$ paraméterezés? Differenciálható-e az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = 0$ pontban? Van-e ott a görbének érintője?

▷ Az $y = |x|$ görbét írja le. A függvény mindenütt differenciálható, 0-ban a deriváltvektora $\mathbf{0}$, de itt nincs érintője a görbének.

6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t^2, \frac{t+1}{t}, \frac{t}{t+1})$ görbe érintőegyenésének egyenletrendszerét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban.

▷ $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$.

7. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, ha tudjuk, hogy $\dot{\mathbf{r}}(t) = (t^3 + 4t, t, 2t^2)$, és $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 0)$.

▷ $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}t^4 + 2t^2 + 1, \frac{1}{2}t^2 + 1, \frac{2}{3}t^3)$.

8. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t)$ görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 1$ szakaszon!

▷ Az ívhossz: $\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arsh} t + \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{arsh} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az integrál

kiszámításánál $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítést használunk, és a $\operatorname{ch}^2 u$ kiintegrálásánál a $\operatorname{ch}^2 u = (1 + \operatorname{ch} 2u)/2$ linearizáló formulát.

9. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (1, t, \frac{2}{3}\sqrt{t^3})$, $0 \leq t \leq 3$ görbénél.

▷ Az $s = \int_0^t \sqrt{1+\tau} d\tau = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{2}{3}$ összefüggésből $t = (\frac{3}{2}s + 1)^{2/3} - 1$, és ezt az $\mathbf{r}(t)$ képletébe helyettesítve:

$$\mathbf{r} = \left(1, \left(\frac{3}{2}s + 1\right)^{2/3} - 1, \frac{2}{3} \left(\left(\frac{3}{2}s + 1\right)^{2/3} - 1\right)^{3/2} \right).$$

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3 - t, t^2 - 4, 2t - 2)$ síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet.)
2. Paraméterezzük az $x^2 + y^2 = z^2$ és az $x + y + z = 1$ felületek metszetgörbét!
3. Adjuk meg az $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{1-t}, \ln(1+t^2), e^{-t}\right)$ görbe érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = 2$ paraméterű pontban.
4. Adjuk meg azt az $\mathbf{r}(t)$ vektorértékű függvényt, amelyre $\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{3}{2}(t+1)^{1/2}, e^{-t}, \frac{1}{1+t}\right)$, és $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1)$.
5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ görbét, ha $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (6t, 12t^2, 2)$, $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ és $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0, 1, 1)$.
6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \left(t+1, \frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}\right)$ görbe ívhosszát a -2 és 0 paraméterű pontok között.
7. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ görbénél!

Eredmények

1. $2x + z = 4$.
2. $\mathbf{r}(t) = \left(t, 1 + \frac{1}{2t-2}, -t - \frac{1}{2t-2}\right)$ (hiperbola, amely kúp és sík metszeteként állt elő).
3. $x = -1 + t, y = \ln 5 + \frac{4}{5}t, z = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}t$.
4. $\mathbf{r}(t) = \left((t+1)^{3/2} - 1, -e^{-t} + 1, \ln(1+t) + 1\right), t > -1$.
5. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t^2, 4t^3 + 1, 2t + 1), \mathbf{r}(t) = (t^3 + 1, t^4 + t, t^2 + t)$.
6. $\int_{-2}^0 |t+1| dt = 1$.
7. $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{5}{2} \sin 2t, s = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = -\frac{5}{4} \cos 2t + \frac{5}{4}, \cos 2t = 1 - \frac{4}{5}s,$
 $\mathbf{r} = \left((1 - \frac{2}{5}s)^{3/2}, (\frac{2}{5}s)^{3/2}, 1 - \frac{4}{5}s\right)$.