Utolsó előadás

Wettl Ferenc

BME Algebra Tanszék, http://www.math.bme.hu/~wettl

2013-12-09

1. Differenciálegyenletek megoldhatóságának elmélete

2. Parciális differenciálegyenletek

1. Differenciálegyenletek megoldhatóságának elmélete

2. Parciális differenciálegyenletek

K.É.P.

Definíció (Explicit diffegyenlethez tartozó kezdetiérték-probléma)

Legyen f $(n+1)$-változós valós függvény, $P = (\xi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ az értelmezési tartományának egy pontja. Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

explicit diffegyenlethez és a P ponthoz tartozó kezdetiérték-problémán olyan y függvény meghatározását értjük, mely
(1) kielégíti a diffegyenletet és
(2) kielégíti az $y(\xi) = \eta_0$, $y'(\xi) = \eta_1, \ldots$, $y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$ kezdeti feltételeket.

Explicit diffegyenlet megoldhatósága

Tétel (Cauchy–Peano-féle egzisztenciatétel)

Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

explicit diffegyenlethez és a $P = (\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ *ponthoz tartozó kezdetiérték-probléma megoldható, ha az* $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ *függvény folytonos egy olyan* $\mathbb{R}^{n+1}$*-beli tartományon, melynek* P *belső pontja!*

Explicit diffegyenlet megoldhatósága 2.

Példa

A következő kezdetiérték-probléma megoldható:

$$y''' = 2\sin(y'y'') - y^3 \frac{\sin x + \cos y}{\sqrt{1 + y'^2}}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 5, \ y''(0) = 3,$$

mivel a $P = (0, 1, 5, 3)$ pont egy környezetében folytonos az

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}; (x, y_0, y_1, y_2) \mapsto 2\sin(y_1 y_2) - y_0^3 \frac{\sin x + \cos y_0}{\sqrt{1 + y_1^2}}$$

függvény.

Explicit diffegyenlet egyértelmű megoldhatósága

Tétel (Picard–Lindelöf-féle unicitástétel)

Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

explicit diffegyenlethez és a $P = (\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ *ponthoz tartozó kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható, ha*

1. f *folytonos egy olyan* $\mathbb{R}^{n+1}$*-beli tartományon, melynek* P *belső pontja (ez eddig a C–P-tétel), és*
2. f *második változójától kezdve mindegyik változója szerint parciálisan diffható, és a derivált korlátos.*

E tétel második feltételét egy kicsit erősebb alakban szokás kimondani, melyet Lipschitz-feltételnek hívnak. E feltétel azt biztosítja, hogy a lehetséges megoldások terében legyen egy összehúzás, melynek mindig egyetlen fixpontja van, ami itt épp a megoldást adja.

Explicit diffegyenlet egyértelmű megoldhatósága 2.

Példa

Az

$$y'' = xy^2 + \sin(y'),\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$$

k.é.p. egyértelműen megoldható, mert

1. az $f(x, y_0, y_1) = xy_0^2 + \sin(y_1)$ függvény folytonos az $\mathbb{R}^3$ minden pontjában, így a $P = (0, 0, 1)$ pont egy környezetében is,
2. és a $\dfrac{\partial f}{\partial y_0} = 2xy_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1} = \cos y_1$ függvények korlátosak a P pont bármely korlátos környezetében.

Sorozatos közelítés (szukcesszív approximáció)

Tétel

Az $y' = f(x,y)$, $y(\xi) = \eta_0$ *differenciálegyenlet ekvivalens az*

$$y(x) = \eta_0 + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

egyenlettel.

Bizonyítás.

$(\Rightarrow)$ $y'(x) = f(x, y(x)) \rightsquigarrow y = \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t + C$, de $y(\xi) = \eta_0$ miatt $C = \eta_0$.
$(\Leftarrow)$ $y(x) = \eta_0 + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ (változó felső határú integrál deriváltjára vonatkozó tétel) $\rightsquigarrow y' = f(x, y)$; másrészt $x = \xi$ helyen az integrál 0 $\rightsquigarrow$ $y(\xi) = \eta_0$. $\square$

Sorozatos közelítés (szukcesszív approximáció) 2.

Tegyük fel, hogy f eleget tesz a Picard–Lindelöf-tétel két feltételének. Ekkor az

$$y(x) \mapsto \eta_0 + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

leképezés összehúzás a függvények terén, és ekkor az $y_0 = \eta_0$,

$$y_{k+1}(x) = \eta_0 + \int_\xi^x f(t, y_k(t))\,\mathrm{d}t$$

rekurzív függvénysorozat a fixponthoz konvergál, mely a megoldással megegyezik.

Sorozatos közelítés (szukcesszív approximáció) 3.

Példa

Oldjuk meg az $y' = x + y$, $y(0) = 1$ k.é.p.-t fokozatos közelítéssel, vagy legalább adjunk a megoldásra egy közelítést.

Megoldás: $y'(x) = y(x) + x$, $y(0) = 1$, az összehúzás fixpontját megadó sorozat: $y_0 = 1$,

$$y_{k+1}(x) = \eta_0 + \int_\xi^x f(t, y_k(t))\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x y_k(t) + t\,\mathrm{d}t.$$

A sorozat:

$y_1 = 1 + \int_0^x 1 + t\,\mathrm{d}t = 1 + \left[t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$y_2 = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2) + t\,\mathrm{d}t = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

$y_3 = 1 + \int_0^x (1 + t + t^2 + \frac{1}{3!}t^3) + t\,\mathrm{d}t = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

E sorozat az $y(x) = 2e^x - x - 1$ Maclaurin-sorához tart, ami a megoldása e diffegyenletnek.

Parciális diffegyenletek

Definíció (Parciális differenciálegyenlet)

Egy egyenletet parciális differenciálegyenletnek nevezünk, ha az ismeretlen függvény többváltozós, és az egyenletben a parciális deriváltjai, valamint az adott változók egyéb függvényei szerepelnek. Az egyenlet n-edrendű, ha a legmagasabb parciális derivált rendje n.

Definíció (Másodrendű parciális diffegyenlet)

Az x, y változóktól függő u függvényre felírt másodrendű parciális diffegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}) = 0.$$

Másodrendű parciális diffegyenletek osztályozása

Definíció (Másodrendű homogén lineáris parciális diffegyenlet)

Az x, y változóktól függő u függvényre felírt ***másodrendű homogén lineáris parciális diffegyenlet*** *általános alakja:*

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0,$$

ahol a, b, c, d, e, f az x és y változók függvényei, u-ról feltételezzük, hogy parciális deriváltjai folytonosak.
Azt mondjuk, hogy a parc. de.

- ***hiperbolikus***, *ha $ac - b^2 < 0$ (pl. rezgő húr diffegyenlete)*
- ***parabolikus***, *ha $ac - b^2 = 0$ (pl. hővezetés diffegyenlete)*
- ***elliptikus***, *ha $ac - b^2 > 0$*

A rezgő húr diffegyenlete

(Részletesen lásd a régi Feladatgyűjtemény III. 30.12-16 feladatait.) Tegyük az ℓ hosszúságú tökéletesen rugalmas húrt, x-tengely $[0, \ell]$ szakaszára. A húr minden pontja az x-tengelyre merőlegesen mozog, pontjai helyzetét a t pillanatban az $y(x, t)$ függvény írja le. A fizikai levezetésből az adódik, hogy a húr mozgását megadó u függvény kielégíti az

$$y''_{tt} - a^2 y''_{xx} = 0,$$

egyenletet. Ha a húr két vége rögzítve van, akkor fönnállnak a következő peremfeltételek:

$$y(0, t) = 0, \;\; y(\ell, t) = 0.$$

A kezdeti feltételek:

$$y(x, 0) = f(x) \text{ (a húr kezdeti helyzete), és}$$
$$y_t(x, 0) = g(x) \text{ (a húr kezdősebessége).}$$

A rezgő húr diffegyenlete 2: keressük a megoldást...

Keressük a megoldást $y(x,t) = X(x)T(t)$ alakban:
$y_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$, $y_{xx}(x,t) = X''(x)T(t) \rightsquigarrow$
$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) \rightsquigarrow$

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

hisz a bal oldal t-től, a jobb x-től függ, így mindkettő csak konstans lehet.
Ha $\lambda = 0$, akkor $T'' = 0$ és $X'' = 0$ diffegyenletek megoldásaiból $X = Ax + B$, $T = Ct + D$, azaz $u(x,t) = (Ax+B)(Ct+D)$. Ez ellentmond a peremfeltételünknek.
Ha $\lambda = k^2 > 0$, akkor $T'' - a^2k^2T = 0$ és $X'' - k^2X = 0$ diffegyenletek megoldásai $X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, $T(t) = Ce^{akt} + De^{-akt}$, azaz

$$y(x,t) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(Ce^{akt} + De^{-akt}).$$

Peremfeltételünknek ez is ellentmond.

A rezgő húr diffegyenlete 3

Ha $\lambda = -k^2 < 0$, akkor $T'' + a^2k^2T = 0$ és $X'' + k^2X = 0$ diffegyenletek megoldásai $X(x) = A\cos kx + B\sin kx$, $T(t) = C\cos akt + D\sin akt$, azaz

$$y(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(C\cos akt + D\sin akt).$$

A rezgő húr diffegyenlete 4: a peremfeltételek

$0 = y(0, t) = A(C \cos akt + D \sin akt)$ feltételből $A = 0$.
$0 = y(\ell, t) = B \sin k\ell(C \cos akt + D \sin akt)$ feltételből $B \neq 0$ miatt
$\sin k\ell = 0 \rightsquigarrow k\ell = n\pi \rightsquigarrow k = \frac{n\pi}{\ell} \rightsquigarrow$

$$y_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi at}{\ell}\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

tehát

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi at}{\ell}\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

feltéve, hogy a sor konvergens az $x \in [0, \ell]$, $t \in [0, \infty)$ tartományon.

A rezgő húr diffegyenlete 5: a kezdeti feltételek

$$y(x,0) = f(x) \rightsquigarrow y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = f(x)$$

azaz a_n az f-ből képzett 2ℓ szerint periodikus páratlan függvény Fourier-együtthatója.

$$y'_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi at}{\ell} + b_n\frac{n\pi a}{\ell}\cos\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

amiből $y'_t(x,0) = g(x) \rightsquigarrow y'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a b_n}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x)$,

így g-ből képzett 2ℓ szerint periodikus páratlan függvény Fourier-együtthatójából megkapható.

A rezgő húr diffegyenlete 6: a megoldás

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

ahol

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$