MAT B1 – 2. ZH. / 1. rész – 2002. dec. 4. Név: ____________________ Gyakvez.: ______

1. Határozzuk meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét az $f(x) = \cos(\arcsin(x))$ függvénynek. *(2 pont)*

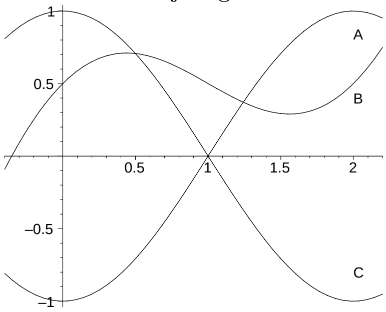
2. Határozzuk meg az alábbi határértékeket! *(3 pont)*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x \operatorname{tg} x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} =$

c) $\lim\limits_{y\to 1+0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} =$

3. Az itt ábrázolt három függvény közül melyik melyiknek lehet második deriváltja, ha csak a grafikonok konvexitását vizsgáljuk? Húzzunk nyilat a függvény betűjelétől a második derivált betűjeléig minden lehetséges esetben. *(3 pont)*



A

B

C

4. Legyen f az a egy teljes környezetében értelmezett függvény. Írjunk az alábbi feltételek melletti négyzetekbe egy D, F vagy X betűt, aszerint hogy a feltételből

D: következik, hogy f differenciálható a-ban,

F: következik, hogy f folytonos a-ban, de az nem, hogy differenciálható,

X: egyik sem következik. *(3 pont)*

(a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{a-x} = 2$ ☐

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 2$ ☐

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ ☐

(d*) $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{a-x}\right| \le 2$ ☐

5. Számítsuk ki az alábbi differenciálhányadosokat! *(4 pont)*

a) $\left(\dfrac{1+\ln x}{x \sin x}\right)' =$

b) $\left((\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x+1})^8\right)' =$

6. Legyen $f = x \mapsto x^2+2x$ $(x \ge 0)$, és legyen g az f inverze. Számítsuk ki a $g'(8)$ értéket (a g függvény meghatározása nélkül). *(3 pont)*

7. Határozzuk meg az $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ aszimptotáinak egyenletét! *(3 pont)*

8. Használjuk a L'Hospital szabályt: *(2 pont)*

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x^2)}{x-1} =$

9. A cos függvény $x = \pi$ helyhez tartozó másodfokú Taylor-polinomja = *(2 pont)*

10. Melyek igazak (I) az alábbi állítások közül, és melyek nem (N)? *(3 pont)*

a) Ha f egész értelmezési tartományán folytonos, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, akkor van olyan $c \in (a,b)$, hogy $f(c) = 0$. ☐

b) Ha f diffható az $[a,b]$-n, akkor ott korlátos is. ☐

c) Ha f szigorúan monoton növekvő és differenciálható az (a,b) intervallumon, akkor minden $c \in (a,b)$ pontban fennáll a $f'(c) > 0$ reláció. ☐

d) Ha $a < c < d < b$ és f differenciálható az (a,b) intervallumon, akkor található olyan $\xi \in (c,d)$ pont, hogy $f'(\xi) = \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$. ☐

e) Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és diffható az (a,b)-n, akkor található olyan $\xi \in (a,b)$ pont, hogy $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$. ☐

11. Legyen $f(x) = (\operatorname{sgn} x - 1)(a-x) + b(\operatorname{sgn} x + 1)$. Az a és b mely értékei esetén lesz az f függvény *(2 pont)*

1. differenciálható minden $x \in \mathbf{R}$ helyen;
2. monoton $\mathbf{R}$-en?