MAT B1 – 1. ZH. / 1. rész – 2000. nov. 3 Név: __________ Gyakvez.: __________

1. Bizonyítsuk igazságtáblával a $\neg(a \wedge \neg b) \equiv a \Rightarrow b$ azonosságot! *(2 pont)*

2. Írjuk fel a következő állítás tagadását (tagadószó használata nélkül): „Minden divergens sorozatnak van legalább két torlódási pontja”! *(1 pont)*

3. Halmazelméleti azonosságok segítségével igazoljuk az $\overline{A \setminus B} \cap (B \cup A) = B$ azonosságot! *(3 pont)*

4. Jelölje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az $\mathbf{R}^{(3)}$ alapvektorait. Írjuk az alábbi műveletek eredményeit a megadott mezőbe! *(2 pont)*

$\mathbf{i} \times (2\mathbf{k}) = \square$, $(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i} = \square$, $(\mathbf{kj})\mathbf{i} = \square$, $\mathbf{kji} = \square$

5. Írjuk fel az $x = 2$ és az $y = 5$ síkok metszésvonalának egy paraméteres egyenletrendszerét! *(2 pont)*

6. Írjuk fel a -2 szám komplex köbgyökei közül a legkisebb pozitív argumentumút! *(3 pont)*

7. Az alábbi síkok és egyenesek közül melyek párhuzamosak, melyek merőlegesek? Írjunk $||$ ill. $\perp$ jelet a „ ... ” helyére, vagy írjunk egy X-et, ha a két elem se nem párhuzamos, se nem merőleges!

$$S_1: \quad x - y + z = 5, \qquad S_2: \quad x + y = 0,$$

$$e_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad e_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 6 \end{cases}$$

$S_1 \ldots S_2$, $e_1 \ldots S_2$, $S_1 \ldots e_2$, $e_2 \ldots S_2$. *(2 pont)*

8. Hozzuk algebrai alakra a $\dfrac{(1+i)^2}{1-3i}$ számot! *(2 pont)*

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \frac{3n^2 - n}{2n^2 + n - 2} = ?$ *(2 pont)*

10. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül (Írjon I vagy H betűt a mezőkbe)? *(4 pont)*

Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok

a) között van olyan, amelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor lineárisan függetlenek. $\square$

b) közül mindegyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor lineárisan összefüggőek. $\square$

c) lineárisan összefüggőek, akkor van köztük olyan, amelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. $\square$

d) lineárisan összefüggőek, akkor mindegyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. $\square$

11. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül (Írjon I vagy H betűt a mezőkbe)? *(4 pont)*

a) Ha az $[a_n]$ sorozat korlátos, a $[b_n]$ pedig 0-sorozat, akkor $[a_n b_n]$ korlátos. $\square$

b) Ha az $[a_n]$ sorozat korlátos, a $[b_n]$ pedig 0-sorozat, akkor $[a_n b_n]$ 0-sorozat. $\square$

c) Ha a $[b_n]$ és az $[a_n b_n]$ sorozat is 0-sorozat, akkor $[a_n]$ korlátos. $\square$

d) Ha az $[a_n]$ sorozat korlátos, az $[a_n b_n]$ pedig 0-sorozat, akkor $[b_n]$ 0-sorozat. $\square$

12. Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyik konvergens, melyik nem! Válaszunkat röviden indokoljuk! *(3 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$$