MAT B1 – 1. ZH.

1. rész – 2004-11-03 Neptunkód: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Gyakv: ______

1. Bizonyítsuk az $\neg(a \Rightarrow \neg b) \vee \neg a \equiv a \Rightarrow b$ azonosságot igazságtáblával! *(2 pont)*

2. Legyen H a dalok és a nótázók halmaza, a $d(x)$ logikai függvényérték pontosan azokra az $x \in H$ elemekre legyen igaz, melyekre x *dal*, az $n(x)$ azokra, melyekre x *nótázó*, az $i(x, y)$ pontosan akkor legyen igaz, ha x nótázó, y dal és x ismeri y-t. Az alábbi formulát fordítsuk át „hétköznapi szavakkal" mondattá, majd az azt követő mondatot (esetleg némi átfogalmazás után, használva a kvantoros állítások tagadásáról tanultakat) formalizáljuk! *(3 pont)*

$\forall x\ \exists y\ [(d(x) \Rightarrow n(y)) \wedge i(y, x)]$

„Van olyan dal, amit nem ismer mindenki."

3. $|X|$ az X halmaz számosságát, az $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{N}$ betűk a valós, racionális, irracionális és természetes számok halmazát jelölik. Tegyük a pontok helyére a $<$, $>$ és $=$ jelek közül azt, amely kifejezi a halmazok számossága közti relációt. *(2 pont)*

$|\mathbb{N}| \ \ldots\ |\mathbb{Q}| \ \ldots\ |\mathbb{I}| \ \ldots\ |\mathbb{R}| \ \ldots\ |\mathbb{N}|$.

4. Adjunk példát olyan sorozatra – vagy írjuk azt, hogy „NINCS" –, mely *(4 pont)*

a) korlátos, de nem konvergens $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) alulról korlátos, de nem korlátos $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) váltakozó előjelű és konvergens $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) monoton növekvő és konvergens $a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Írjuk az alábbi sorok mellé, hogy konvergens vagy divergens, és azt is, hogy melyik kritériummal lehet ezt eldönteni (használjuk a *majoráns-*, *minoráns-*, *hányados-*, *gyökkritérium* vagy az *egyéb* szavakat): *(3 pont)*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

6. Írjuk fel az egyenlet(rendszer)ét egy olyan *(3 pont)*

a) síknak, mely párhuzamos az y-tengellyel: ……………

b) síknak, mely párhuzamos az yz-síkkal: ……………

c) egyenesnek, mely párhuzamos az z-tengellyel: ………

7. Egy síkban van-e a következő négy pont? $A(2, 1, -3)$, $B(1, 2, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(-1, 0, 4)$. *(4 pont)*

8. Végezzük el a $(\sqrt{3} - i)^4$ hatványozást a binomiális tételt használva! *(3 pont)*

9. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül (Írjon I vagy H betűt a mezőkbe)? *(2 pont)*

Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok

a) lineárisan összefüggőek, akkor az $\mathbf{a}_1$ kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. ☐

b) lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{a}_1$ nem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. ☐

c) közül az $\mathbf{a}_1$ kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor a vektorok lineárisan összefüggő rendszert alkotnak. ☐

d) kielégítik a $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ egyenlőséget a $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ együtthatókkal, akkor a vektorok lineárisan függetelenek. ☐

10. Egészítsük ki a folytonosság alábbi definícióját! Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos* az a pontban, ha f értelmezve van ……………………………… és tetszőleges pozitív … számhoz van olyan pozitív … szám, hogy ha $|x - a| < \alpha$, akkor f értelmezve van x-ben és $|f(x) - f(a)| < \beta$. *(2 pont)*

11. Írjuk fel a $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$ vektornak az $\mathbf{a} = (4, 7, -4)$ vektor irányába eső merőleges vetületi vektorát, és ennek segítségével bontsuk fel $\mathbf{b}$-t egy $\mathbf{a}$-val párhuzamos és egy rá merőleges vektor összegére. *(3 pont)*