MAT A1a – 1. ZH. – 2014. október 21.

Név: ______________________

Neptun kód: ______________________

Gyakvez.: ______________________

Gyakorlat (nap, időpont): ______________________

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre! *12 pont, hibás válasz −4 pont, mely csak ebben a feladatban lesz levonva és negatív pontszámot nem lehet elérni.*

a) Írjunk az alábbi halmazok közé $=$, $<$ vagy $>$ jelet a számosságuknak megfelelően:

b) A kvantor megfelelő megváltoztatásával tagadjuk az alábbi állítást: „minden nap, ha korán fölkelek, elmegyek futni”

c) Végezzük el az alábbi műveletet!

d) Mikor 0 két vektor vektori szorzata?

e) Igaz vagy hamis: ha három vektornak csak egyetlen lineáris kombinációja egyezik meg a nullvektorral, akkor azok a vektorok lineárisan függetlenek?

f) Igaz-e minden $[a, b]$-n értelmezett f függvényre, hogy ha $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = 0$? Ha nem, akkor milyen további feltétel mellett igaz?

g) Melyik igaz: „ha f folytonos c-ben, akkor differenciálható is”, „ha f differenciálható c-ben, akkor folytonos is ott”

h) Melyik helyes az alábbi két összefüggés közül:
$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$,
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \Rightarrow \neg B$.

a) |természetes számok| = |racionális számok| < |valós számok|

b) „van olyan nap, amin bár korán kelek föl, de nem megyek futni”

c) $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{j}$

d) ha lineárisan összefüggők (ill. párhuzamosak)

e) igaz

f) nem igaz; ha f folytonos, akkor már igaz

g) az első hamis, a második igaz

h) az első igaz, a második hamis
(ellenpl.: $A = B = 0$)

2. Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (4, 4, -1)$ vektort egy a $\mathbf{b} = (3, 2, 6)$ vektorral párhuzamos $\mathbf{x}$ és egy rá merőleges $\mathbf{y}$ vektor összegére! *(6 pont)*

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{\overbrace{12+8-6}^{14}}{\underbrace{9+4+36}_{49}}(3,2,6) = \left(\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{x} = \left(\frac{22}{7}, \frac{24}{7}, -\frac{19}{7}\right)$$

3. Paraméterezzük a $P(2,1,2)$ és $Q(3,0,1)$ pontokat összekötő szakasz pontjait! *(3 pont)*

$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,-1,-1)$,

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

4. *a)* Adjuk meg a $(\sqrt{3} - i)z^4 - 2i = 0$ egyenlet összes gyökét algebrai alakban! *(6 pont)*

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet! *(2 pont)*

$$\frac{z}{3+4i} = \overline{3+4i}$$

a) $z^4 = \dfrac{2i}{\sqrt{3}-i} \rightsquigarrow z^4 = \dfrac{2i(\sqrt{3}+i)}{3+1} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow z^4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i =: w$, $\arg(w) = 120°$, $|w| = 1$

$z_{1,3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$, $z_{2,4} = \mp\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z = 9 + 16 = 25$

5. Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+4} - x)$ határértéket! *(5 pont)*

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+4} - x) \overset{„\infty(\infty-\infty)”}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}+x} \overset{„\frac{\infty}{\infty}”}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1} = 2$$

6. Tekintsük az $A(1,1,1)$, $B(3,3,2)$, $C(2,-1,3)$ és $D(2,-3,-2)$ vektorokat. *(8 pont)*

a) Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

b) Írjuk föl az ABC sík egyenletét!

c) Határozzuk meg a D pontnak e síktól való távolságát!

a) $\overrightarrow{AB} = (2,2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,-2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{2} = \frac{9}{2} =$$

b) $s:\ 6(x-1) - 3(y-1) - 6(z-1) = 0$

c) $|\mathbf{n}_s| = |(6,-3,-6)| = 9;$

$$d(s; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{2}{3}(z-1)$$

$$d(s; D) = \frac{2}{3} - \frac{-4}{3} + \frac{6}{3} = 4$$

7. Adjuk meg az a és b paraméter értékét úgy, hogy az f függvény folytonos legyen! *(8 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2} & x < 0 \\ ax + b & 0 \le x \le 6 \\ \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} & 6 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(2x)}{4x^2}\frac{4}{3} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = b$$

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} =$$
$$= \lim_{x\to 6^+} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}\frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 6^+} \frac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 6^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$$
$$a \cdot 6 + b = 6a + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \rightsquigarrow a = -\frac{5}{72}$$

$$ax + b = -\frac{5}{72}x + \frac{2}{3}$$