MAT B1 – 1. pótZH, 1. rész – 2002. nov. 5. Név: _____ Neptun:_____ Gykv.: ____

1. Bizonyítsuk igazságtáblával az $(a \vee \neg b) \wedge b \equiv (b \vee \neg a) \wedge a$ azonosságot! *(2 pont)*

2. Melyik igaz (I), melyik hamis (H) az alábbi állítások közül (Írjunk I vagy H betűt a mezőkbe)? *(3 pont)*

Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok

a) lineárisan függetlenek, akkor van köztük olyan, amelyik nem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. ☐

b) nem mindegyike fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, akkor e vektorok lineárisan függetlenek. ☐

c) közül mindegyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, akkor lineárisan összefüggőek. ☐

d) lineárisan összefüggőek, akkor mindegyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. ☐

3. Konstruáljunk olyan $[a_n]$ és $[b_n]$ sorozatot ha lehetséges (ha nem lehetséges, jelezzük ezt egy X betűvel), hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és *(3 pont)*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 2$ legyen!
   $a_n =$ $b_n =$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$ legyen!
   $a_n =$ $b_n =$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ legyen!
   $a_n =$ $b_n =$

4. Írjuk fel a $-3+3\sqrt{3}i$ negyedik gyökei közül azt, amelyiknek argumentuma a legközelebb van π-hez. *(3 pont)*

5. Írjuk fel a $\mathbf{a} = (-3, -1, 2)$ vektornak a $\mathbf{c} = (2, 6, -3)$ vektor irányába eső merőleges vetületi vektorát, és ennek segítségével bontsuk fel **a**-t egy **c**-vel párhuzamos és egy rá merőleges vektor összegére. *(4 pont)*

6. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza a $x = 1 - 3t$, $y = 2$, $z = 2 + t$ egyenletrendszerű egyenest és átmegy a $P(1, 1, 1)$ ponton. *(4 pont)*

7. Halmazelméleti azonosságok segítségével igazoljuk az $(A \cap \overline{B}) \cup B = (B \cap \overline{A}) \cup A$ azonosságot! *(3 pont)*

8. Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezést: *(3 pont)*
$\frac{(1+2i)^3}{1-2i}$.

9. Számítsuk ki az alábbi határértéket: *(3 pont)*
$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \sqrt[n]{n^2} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^3 \frac{3n^3 - n}{2n^3 + 3}$.

10. Az alábbi síkok és egyenesek közül melyek párhuzamosak, melyek merőlegesek? Írjunk $\|$ ill. $\perp$ jelet a „…” helyére, vagy írjunk egy X-et, ha a két elem se nem párhuzamos, se nem merőleges!

$$S_1: \quad x - y + 2z = 5, \qquad S_2: \quad x + y = 3,$$

$$e_1: \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{aligned} \qquad e_2: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z - 5$$

$S_1 \ldots S_2$, $e_1 \ldots e_2$, $e_1 \ldots S_2$, $S_1 \ldots e_2$. *(2 pont)*