1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat parciális integrálással!

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$

c) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ d) $\displaystyle\int \sin x\cos 5x\,dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\sin x\,dx$

2. Trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel számítsuk ki a következő integrálokat!

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2}\,dx$

3. Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket?

a) $\displaystyle\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)}$ b) $\displaystyle\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2}$ c) $\displaystyle\frac{1}{(x^2-9)^2}$

4. Bontsuk fel a következő racionális törtfüggvényeket polinom és elemi törtfüggvények összegére, aztán számítsuk ki az integráljukat!

a) $\displaystyle\frac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+x^2}$ b) $\displaystyle\frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}$ c) $\displaystyle\frac{5x+3}{x^2-4x+5}\,dx$

5. Számítsuk ki a következő integrálokat!

a) $\displaystyle\int e^{x-2}\operatorname{ch}(3x+1)\,dx$ b) $\displaystyle\int \ln\frac{x^3}{x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x^4-x+3}{x^3-2x^2-x+2}$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

Megoldások

1. A parciális integrálásnál aláhúzás jelöli, hogy az új integrálban melyik tényezőnek fog a deriváltja szerepelni, míg a másiknak a primitív függvénye.

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \int 1\cdot \underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \int x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \int\frac{x}{x^2+1}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

b) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx = \int 1\cdot\underline{\ln^2 x}\,dx = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln^2 x - \int 2\cdot\underline{\ln x}\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

c) $\displaystyle\int e^{2x}\,\underline{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int\frac{1}{2}e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx =$ $\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\,\underline{\sin 3x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int\frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx$. Ebből az ismeretlen $I = \displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ integrálra az $I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$ egyenletet kapjuk. Így $I = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C$. (*Más megoldás:* Tudjuk, hogy $e^{ax}\cos(bx)$-nek (és $e^{ax}\sin(bx)$-nek is) van $Ae^{ax}\cos(bx)+Be^{ax}\sin(bx)$ alakú primitív függvénye valamely $A,B\in\mathbb{R}$ együtthatókkal. Ha ezt a fügvényt lederiváljuk és összehasonlítjuk az integrandussal, akkor két kétváltozós lineáris egyenletet kapunk az A,B ismeretlenekre, és ebből az A és B együtthatókat kiszámíthatjuk. Ebben az esetben az $(Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\sin 3x)' = e^{2x}\cos 3x$ egyenlőségből $(2A+3B)e^{2x}\cos 3x + (-3A+2B)e^{2x}\sin 3x = e^{2x}\cos 3x$ adódik, tehát $2A+3B=1$, és $-3A+2B=0$, amiből $A=\frac{2}{13}$ és $B=\frac{3}{13}$.)

d) A c)-hez hasonló módon parciális integrálással is kiszámíthatjuk vagy a $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ trigonometrikus összefüggés segítségével átalakíthatjuk az integrált: $\displaystyle\int\sin x\cos 5x\,dx = \int\frac{1}{2}\sin(6x)+\frac{1}{2}\sin(-4x)\,dx = \int\frac{1}{2}\sin(6x)-\frac{1}{2}\sin(4x)\,dx = -\frac{1}{12}\cos(6x)+\frac{1}{8}\cos(4x)+C.$

e) $\displaystyle\int \operatorname{sh}x\,\underline{\sin x}\,dx = \operatorname{ch}x\sin x - \int\operatorname{ch}x\,\underline{\cos x}\,dx = \operatorname{ch}x\sin x - \operatorname{sh}x\cos x - \int\operatorname{sh}x\sin x\,dx$, tehát $I = \int\operatorname{sh}x\sin x\,dx$-re $I = \operatorname{ch}x\sin x - \operatorname{sh}x\cos x - I$, azaz $\int\operatorname{sh}x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{ch}x\sin x - \frac{1}{2}\operatorname{sh}x\cos x + C$.

2. a) $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$, így érdemes az $\frac{x}{2} = \operatorname{sh}u$, azaz $x = 2\operatorname{sh}u$, $dx = 2\operatorname{ch}u\,du$ helyettesítést elvégezni: $\displaystyle\int\sqrt{x^2+4}\,dx = \int 2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\;2\operatorname{ch}u\,du = \int 4\operatorname{ch}^2 u\,du = \int 2(\operatorname{ch}2u+1)\,du = \operatorname{sh}2u + 2u + C = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{arsh}\frac{x}{2} + C = 2\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{arsh}\frac{x}{2} + C = x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} + 2\operatorname{arsh}\frac{x}{2} + C =$

b) $\sqrt{15+2x-x^2} = \sqrt{15-(x^2-2x)} = \sqrt{16-(x-1)^2} = 4\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)^2}$, így az $\displaystyle\frac{x-1}{4} = \sin u$, azaz $x = 1+4\sin u$, $dx = 4\cos u\,du$ ($u\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$) helyettesítést alkalmazzuk:

$\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{1-\sin^2 u}\;4\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} 16\cos^2 u\,du =$ $\int_0^{\pi/2} 8+8\cos 2u\,du = \left[8u+4\sin 2u\right]_0^{\pi/2} = 4\pi$. (Az integrálás új határait az $x=1 \Rightarrow u = \arcsin\frac{x-1}{4} = \arcsin 0 = 0$ és $x=5 \Rightarrow u = \arcsin\frac{x-1}{4} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ összefüggésekből kaptuk.)

3. a) $\dfrac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x-3}$

b) $\dfrac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$

c) $\dfrac{1}{(x^2-9)^2} = \dfrac{1}{(x-3)^2(x+3)^2} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2} + \dfrac{C}{x+3} + \dfrac{D}{(x+3)^2}$

4. a) $\dfrac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+x^2} = \dfrac{x^3+3x^2-x+2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1} =$ $\dfrac{A(x^3+x)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$. Az x-hatványok együtthatóit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A+C &= \ 1\\ B+D &= \ 3\\ A &= -1\\ B &= \ 2. \end{aligned}$$

Ebből a paraméterek értéke: $A=-1$, $B=2$, $C=2$ és $D=1$, az integrál pedig: $\int -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}\,dx =$ $-\ln|x| - \dfrac{2}{x} + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$.

b) $\int \dfrac{x^3-2x+1}{(x+1)^3}\,dx = \int 1 - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{(x+1)^3}\,dx = x - 3\ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + C$. (A parciális törtek együtthatóit megkaphatjuk az a) részben ismertetett módon, vagy pedig a számlálót többszörösen eloszthatjuk maradékosan $(x+1)$-gyel, akkor a maradékok rendre az $(x+1)^{-3}$, $(x+1)^{-2}$ és $(x+1)^{-1}$ együtthatóit, az utolsó hányados pedig a polinomot adja.)

c) A nevező $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlan másodfokú polinom, tehát az integrandus eleve elemi törtfüggvény. A nevező deriváltja $2x-4$, és ennek alapján az integrál kiszámításához tovább bontjuk a számlálót: $\dfrac{5x+3}{x^2-4x+5} = \dfrac{5}{2}(2x-4) + \dfrac{13}{x^2-4x+5} =$ $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} + \dfrac{13}{(x-2)^2+1}$, tehát

$$\int \frac{5x+3}{x^2-4x+5} = \frac{5}{2}\ln(x^2-4x+5) + 13\operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

5. a) $\int e^{x-2}\operatorname{ch}(3x+1)\,dx = \int e^{x-2}(\frac{1}{2}e^{3x+1} + \frac{1}{2}e^{-3x-1})\,dx = \int \frac{1}{2}e^{4x-1} + \frac{1}{2}e^{-2x-3}\,dx =$ $\frac{1}{8}e^{4x-1} - \frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$

b) $\displaystyle\int \ln\frac{x^3}{x+1}\,dx = \int 3\ln x - \ln(x+1)\,dx = 3x\ln x - 3x - (x+1)\ln(x+1) + (x+1) + C$, ugyanis $\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$. Az integrandus felbontása csak $x > 0$-ra működik, bár az eredeti függvény $x < -1$-re is értelmezve van. Viszont az eredmény egyszerűen általánosítható arra a tartományra is: $3x\ln|x| - 3x - (x+1)\ln|x+1| + (x+1) + C$.

c) $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ helyettesítéssel: $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}u\,\underline{e^{-u}}\,du = \frac{1}{2}u(-e^{-u}) - \int \frac{1}{2}(-e^{-u})\,du = -\frac{1}{2}(u+1)e^{-u} + C = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C$, és ebből az improprius integrál $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{b^2+1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{4be^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2}$.

d) $x^2+2x = (x+1)^2 - 1$, így az $x+1 = \operatorname{ch} u$ $(u \geq 0)$, $dx = \operatorname{sh} u\,du$ helyettesítést érdemes alkalmazni:
$\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}\,\operatorname{sh} u\,du = \int \operatorname{sh}^2 u\,du = \int \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2u) - \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arch}(x+1)) - \frac{1}{2}\operatorname{arch}(x+1) + C =$
$\displaystyle\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\operatorname{arch}(x+1) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\underline{\operatorname{arctg} x}\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arsh} x + C$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4-x+3}{x^3-2x^2-x+2} = \int x+2+\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\,dx = \int x+2-\frac{3/2}{x-1} + \frac{5/6}{x+1} + \frac{17/3}{x-2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x+1| + \frac{17}{3}\ln|x-2| + C$ (Mivel a nevező csupa különböző lineáris tényezőből áll, a parciális törtek együtthatóit a letakarásos módszerrel is kiszámíthatjuk: $\frac{1}{x-1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x+1)(x-2)}\big|_{x=1} = -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{x+1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}\big|_{x=-1} = \frac{5}{6}$, és $\frac{1}{x-2}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)}\big|_{x=2} = \frac{17}{3}$.)

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot\underline{\ln(1+x)}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \ln|x| - \ln(x+1) + C$