1. Számítsuk ki helyettesítéssel az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int e^{3x}\sqrt{e^x-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat (a másodfokú polinomokat teljes négyzetté való kiegészítéssel érdemes $\pm u^2 \pm 1$ alakúra hozni)!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8x+16}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

3. Trigonometrikus átalakítások segítségével számítsuk ki a következőket!

a) $\displaystyle\int \cos^5 x \operatorname{tg} x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

4. Alkalmazzunk parciális integrálást az alábbi integráloknál!

a) $\displaystyle\int (x+2)\cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$ d) $\displaystyle\int (x^2-x+2)e^{-x}\,dx$

Megoldások

1. a) $u=e^x-1$ helyettesítéssel $du=e^x\,dx$, így $\displaystyle\int e^{3x}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int e^{2x}\sqrt{e^x-1}\,e^x\,dx=$ $\displaystyle\int(u+1)^2\sqrt{u}\,du=\int u^{5/2}+2u^{3/2}+u^{1/2}\,du=\frac{2}{7}u^{7/2}+\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}+C=$ $\displaystyle\frac{2}{7}(e^x-1)^{7/2}+\frac{4}{5}(e^x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(e^x-1)^{3/2}+C$

b) $u=x^2+1$ helyettesítéssel $du=2x\,dx$, és $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{(x^2+1)^5}\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{x^2}{(x^2+1)^5}\,2x\,dx=$ $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{2}\frac{u-1}{u^5}\,du=\int_1^2\frac{1}{2}u^{-4}-\frac{1}{2}u^{-5}\,du=\left[-\frac{1}{6}u^{-3}+\frac{1}{8}u^{-4}\right]_1^2=\frac{11}{384}$

c) $u=\sqrt{x}-2$ helyettesítéssel $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, és $\displaystyle\int_1^9\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\,dx=$ $\displaystyle\int_1^9 2\sqrt{x}\,\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\;\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int_{-1}^1 2(u+2)u^{1/3}\,du=\int_{-1}^1 2u^{4/3}+4u^{1/3}\,du=$ $\displaystyle\left[\frac{6}{7}u^{7/3}+3u^{4/3}\right]_{-1}^1=\frac{12}{7}$

d) $u=\sqrt[6]{x}$ helyettesítéssel $du=\frac{1}{6}x^{-5/6}\,dx$, és $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx=$ $\displaystyle\int\frac{6x^{5/6}}{x^{1/2}(x^{1/3}+1)}\cdot\frac{1}{6}x^{-5/6}\,dx=\int\frac{6x^{1/3}}{x^{1/3}+1}\cdot\frac{1}{6}x^{-5/6}\,dx=\int\frac{6u^2}{u^2+1}\,du=$ $\displaystyle\int 6-\frac{6}{u^2+1}\,du=6u-6\operatorname{arctg}u+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$

e) $u=2x+1$ helyettesítéssel $du=2\,dx$, és $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx=\int\frac{\frac{1}{4}(u+1)}{\sqrt[3]{u}}\,du=$ $\displaystyle\int\frac{1}{4}u^{2/3}+\frac{1}{4}u^{-1/3}\,du=\frac{3}{20}u^{5/3}+\frac{3}{8}u^{2/3}+C=\frac{3}{20}(2x+1)^{5/3}+\frac{3}{8}(2x+1)^{2/3}+C$

2. a) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx=\operatorname{arsh}(x-1)+C$

b) A nevezőt teljes négyzetté való kiegészítéssel átalakítjuk:
$2x^2+8x+16=2(x^2+4x)+16=2(x-2)^2-8+16=2((x-2)^2+4)=8((\frac{1}{2}x-1)^2+1)$,
és ebből $\displaystyle\int\frac{1}{2x^2+8x+16}\,dx=\int\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}x+1)^2+1}\,dx=\frac{1}{8}\cdot 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+C=$ $\displaystyle\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+C$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

3. a) $\displaystyle\int\cos^5 x\operatorname{tg}x\,dx=\int\cos^4 x\sin x\,dx=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

b) $\sin 2x=2\sin x\cos x=-(2-\sin^2 x)'$, így $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{2-\sin^2 x}\,dx=-\ln(2-\sin^2 x)+C$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2(\cos^2 2x)}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2}\cos 2x\,dx=$

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$. Az $u = \sin x$ helyettesítéssel ez $\displaystyle\int \frac{1}{1-u^2}\,du = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$ (felhasználva a 2.c) feladat eredményét). Másképp: $\displaystyle\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, és $\displaystyle(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, tehát $\displaystyle\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)' = \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}$, ezért $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)'}{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right| + C$.

4. a) A megoldásokban a parciális integrálásnál aláhúzás mutatja, hogy az új integrálban melyik tényezőnek szerepel a deriváltja, míg a másik a primitív függvénye áll: $f(x)\underline{g(x)}\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$.

a) $\displaystyle\int \underline{(x+2)}\cos x\,dx = (x+2)\sin x - \int \sin x\,dx = (x+2)\sin x + \cos x + C$

b) $\displaystyle\int x\,\underline{\ln x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{x}x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

c) $\displaystyle\int 1\cdot\underline{\operatorname{arctg} x}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

d) $\displaystyle\int \underline{(x^2-x+2)}\,e^{-x}\,dx = (x^2-x+2)(-e^{-x}) - \int \underline{(2x-1)}\,(-e^{-x})\,dx =$ $-(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -(x^2-x+2)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C =$ $-(x^2+x+3)e^{-x} + C$