9. matematika gyakorlat
Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz

($^{\mathrm{HF}}$ – *javasolt házi feladat,* * – *nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B – *Babcsányi feladatgyűjtemény I.*, T – *Thomas-féle kalkulus I.)*

1. *(Arkuszfüggvények értékei)* Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

a)$^{\mathrm{B10.111}}$ $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, b) $\arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$ (ábrázoljuk is!)

c)$^{\mathrm{B10.112}}$ $\arcsin \sin 13$, d)$^{\mathrm{HF,\, B10.115}}$ $\arccos \cos 7$

2. *(Monotonitás és lokális szélsőérték differenciális feltételei)* Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények milyen intervallumokon monotonok, hol és milyen lokális szélsőértékeik vannak?

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$, b) $g(x) = \cos^2 x - 2\sin^2 x$, c)$^{\mathrm{HF,T4.3.27}}$ $h(x) = \sqrt[3]{x}(x^2-4)$

3. *(Konvexitás és inflexiós pont differenciális feltételei)* Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények milyen intervallumokon azonos görbületűek?

a) $f(x) = e^x(x-1)$, b) $g(x) = x\ln x$, c)$^{\mathrm{HF,T4.4.7.PÉLDA}}$ $h(x) = \dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$

4. *(Gyökhelyek vizsgálata Rolle- és Bolzano-tételekkel ill. függvényvizsgálattal)*
a) A Rolle-tétel felhasználásával igazoljuk, hogy az $f(x) = x(x-1)(x-3)(x-6)$ függvény *deriváltfüggvényének* pontosan három zérushelye van.
b)$^{\mathrm{HF}}$ A Rolle-tétel alábbi alakjával igazoljuk, hogy az $f(x) = 3x^3 + 3x - 2$ függvénynek pontosan egy zérushelye van.

Ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deriválható, akkor minden $x_1 < x_2$ esetén, ha nem létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, hogy $f'(\xi) = 0$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvény mely intervallumokon szigorúan monoton és igazoljuk, hogy pontosan két zérushelye van!

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12$$

5. *(Weierstrass-tétel, abszolút szélsőértékek)* Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit!

a) $f : [-2, 2] \to \mathbf{R},\ x \mapsto |x|e^x$, b) $g : [-3, 3] \to \mathbf{R},\ x \mapsto |x|(x^2-4)$,
c)$^{\mathrm{HF}}$ $h : [0; 4] \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, d)$^{\mathrm{HF,T4.3.35.}}$ $k : [0; +\infty) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$

6.
a) Adjuk meg a tg függvény $\frac{\pi}{4}$ ponthoz tartozó érintőegyenesének egyenletét!
b)* A tg függvényre és alkalmas intervallumra felírt Lagrange-tétellel igazoljuk, hogy minden $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ számra

$$\operatorname{tg} x > 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$