1. Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel, ha
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$, és $g(x) = x^2 + x$;
b) $f(x) = x^4 - 5x^2 - x + 2$, és $g(x) = 2x^3 + x - 1$;
c) $f(x) = 3x^3 + x + 2$, és $g(x) = x - 2$.

2. A Horner-módszer alkalmazásával számítsuk ki a következőket:
a) $f(x) = x^4 - 5x^2 - x + 2$ maradékos osztása $(x + 2)$-vel;
b) $f(3)$ értéke, ha $f(x) = x^6 - 4x^5 - x^4 + 10x^3 + 5x + 2$;
c) $x^5 - 2x^2 + x + 1$ maradékos osztása $(x^2 - 1)$-gyel (a Horner-módszert kétszer alkalmazva: $(x - 1)$-gyel, és a hányadosra $(x + 1)$-gyel).

3. A racionális gyökteszt szerint melyik racionális számok közül kerülnek ki az $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 6$ polinom racionális gyökei, ha egyáltalán vannak ilyenek?

4. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$-ben:
a) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$;
b) $2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$.

5. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!
a) $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1$ b) $\operatorname{arsh} 2$ c) $\operatorname{th}(\ln 5)$ d) $\operatorname{th}(\operatorname{arsh}(-3))$

6. Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és deriváltját!
a) $\operatorname{sh}(\arccos x)$ b) $e^x \operatorname{ch} x$ c) $\operatorname{arch} x^3$

7. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre!
a) $(x^2 - 1)^2$ b) $\sqrt[3]{1 - x^3}$ c) $\dfrac{\ln x}{x}$ d) $\operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$ e) $\operatorname{arch}(\frac{1}{x} - 1)$

Megoldások

1. a) $x^3+3x^2-x+1=(x^2+x)(x+2)+(-3x+1)$
b) $x^4-5x^2-x+2=(2x^3+x-1)\frac{1}{2}x+(-\frac{11}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2)$
c) $3x^3+x+2=(x-2)(3x^2+6x+13)+28$

2. a)

	1	0	-5	-1	2
-2	1	-2	-1	1	0

$x^4-5x^2-x+2=(x+2)(x^3-2x^2-x+1)+0$

b)

	1	-4	-1	10	0	5	2
3	1	-1	-4	-2	-6	-13	-37

$x^6-4x^5-x^4+10x^3+5x+2=(x-3)(x^5-x^4-4x^3-2x^2-6x-13)+(-37)$, és ebből $f(3)=-37$.

c)

	1	0	0	-2	1	1
1	1	1	1	-1	0	1
-1	1	0	1	-2	2	

$x^5-2x^2+x+1=(x-1)(x^4+x^3+x^2-x)+1=(x-1)((x+1)(x^3+x-2)+2)+1=(x-1)(x+1)(x^3+x-2)+(x-1)2+1=(x^2-1)(x^3+x-2)+(2x-1)$

3. Csak olyan racionális számok lehetnek gyökei, amelynek egyszerűsített $\frac{p}{q}$ alakjában p osztója 6-nak (tehát $p=\pm1,\pm2,\pm3\pm6$), és q osztója 3-nak (tehát $q=1,3$). Így $\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$.

4. a) $x^4-3x^3+x^2+4$ lehetséges racionális gyökei a racionális gyökteszt szerint $\pm1,\pm2,\pm4$, de látható, hogy negatív helyen a függvény értéke pozitív, továbbá az 1 nem gyöke (az együtthatók összege nem 0), így először az $(x-2)$-t próbáljuk kiemelni Horner-módszerrel, és kiderül, hogy az valóban osztója a polinomnak, sőt a hányadosnak is: $x^4-3x^3+x^2+4=(x-2)^2(x^2+x+1)$, így a polinom gyökei 2, és $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
b) A polinom lehetséges racionális gyökei $\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$. A Horner-módszerrel behelyettesítve, és leosztva azt kapjuk, hogy $2x^5-x^4+4x^3-2x^2-6x+3=(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+6)$, tehát a gyökök $1,-1,\frac{1}{2},\pm\sqrt{3}i$.

5. a) $\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1=\dfrac{e-\frac{1}{e}}{2}+\dfrac{e+\frac{1}{e}}{2}=e$.
b) $\operatorname{arsh}2=x$, ha $\operatorname{sh}x=2$, azaz $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=2$. Az e^{-x}-et $\frac{1}{e^x}$-ként írva, és az egyenletet átrendezve e^x-re egy másodfokú egyenletet kapunk: $(e^x)^2-4e^x-1=0$, amiből $e^x=2\pm\sqrt{5}$. De $e^x>0$ miatt ebből csak a pozitív a jó megoldás, így $x=\ln(2+\sqrt{5})$, azaz $\operatorname{arsh}2=\ln(2+\sqrt{5})$.
c) $\operatorname{th}(\ln 5)=\dfrac{\operatorname{sh}\ln 5}{\operatorname{ch}\ln 5}=\dfrac{(e^{\ln 5}-e^{-\ln 5})/2}{(e^{\ln 5}+e^{-\ln 5})/2}=\dfrac{5-\frac{1}{5}}{5+\frac{1}{5}}=\dfrac{12}{13}$.

d) $\operatorname{th}\operatorname{arsh}(-3) = \dfrac{\operatorname{sh}\operatorname{arsh}(-3)}{\operatorname{ch}\operatorname{arsh}(-3)} = \dfrac{\operatorname{sh}\operatorname{arsh}(-3)}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\operatorname{arsh}(-3)}} = \dfrac{-3}{\sqrt{1+(-3)^2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}.$

6. a) $f(x) = \operatorname{sh}(\arccos x)$-re $D(f) = [-1, 1]$, mert arccos itt van értelmezve, sh pedig mindenhol. A deriváltja: $f'(x) = \operatorname{ch}(\arccos x) \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $e^x \operatorname{ch} x$ az egész $\mathbb{R}$-en értelmezve van, és deriváltja $e^x \operatorname{ch} x + e^x \operatorname{sh} x = e^x \cdot (\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})) = e^{2x}$ (vagy előbb egyszerűsítünk: $e^x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{2x}+1)$, és aztán deriválunk).

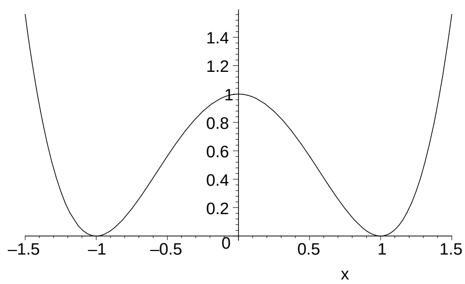
c) arch értelmezés tartománya $[1, +\infty]$, tehát az $f(x) = \operatorname{arch} x^3$ azokra az x-ekre van értelmezve, amelyekre $x^3 \geq 1$, és ezek éppen az $[1, +\infty)$ intervallum elemei. A derivált $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^6-1}} \cdot 3x^2$.

7. a) $f(x) = (x^2-1)^2$-re $D(f) = \mathbb{R}$, és f mindenütt folytonos páros függvény. A tengelymetszetek $(0, 1)$ és $(\pm 1, 0)$. A függvénynek nem lehet függőleges aszimptotája, mert az egész számegyenesen folytonos, továbbá vízszintes és ferde aszimptotája sincs, mivel $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$.

$$f'(x) = 2(x^2-1) \cdot 2x$$
$$f''(x) = (4x^3 - 4x)' = 12x^2 - 4$$

$f'(x)$ az $x = 0, \pm 1$ helyeken 0, és mindenütt értelmezve van. $f''(x)$ az $x = \pm 1/\sqrt{3}$ helyeken 0, és mindenhol értelmezve van. Az deriváltak előjeleit, és az $f(x)$ függvény ebből adódó tulajdonságait a táblázat mutatja.

$x:$	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		∞
f'		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
f''		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
f		$\searrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cup$	
			MIN		*INFL*		*MAX*		*INFL*		*MIN*		
$f:$	∞		0		$\frac{4}{9}$		1		$\frac{4}{9}$		0		∞



A grafikonról leolvasható az is, hogy $R(f) = [0, +\infty)$.

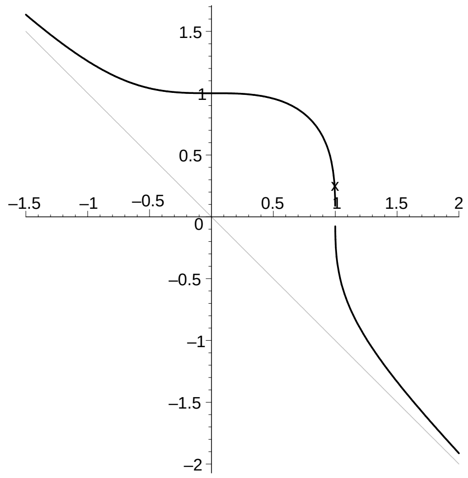
b) Ha $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, akkor $D(f) = \mathbb{R}$, és itt folytonos is a függvény. Nem páros és nem páratlan, tengelymetszetei: $(0, 1)$ és $(1, 0)$. Függőleges aszimptotája nem lehet, ∞-ben: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3} - 1} = -1$, és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^3+x^3}{(1-x^3)^{2/3} - (1-x^3)^{1/3}x + x^2} = \dfrac{1}{x^2((\frac{1}{x^3}-1)^{2/3} - (\frac{1}{x^3}-1)^{1/3} + 1)} = 0$, tehát

f ferde aszimptotája $y = x$, és ugyanez az egyenes $-\infty$-ben is aszimptotája.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x^3)^{-2/3} \cdot (-3x^2) = \frac{-x^2}{(1-x^3)^{2/3}}$$
$$f''(x) = -2x \cdot (1-x^3)^{-2/3} - x^2 \cdot (-\frac{2}{3})(1-x^3)^{-5/3} \cdot (-3x^2) = \frac{-2x}{(1-x^3)^{5/3}}$$

$f'(x)$ az $x = 0$-ban 0, és $x = 1$-ben nincs értelmezve, $f''(x)$ ugyanígy.

x:	$-\infty$		0		1		∞
f'		$-$		$-$		$-$	
f''		$+$		$-$		$+$	
f''		$\searrow$ $\cup$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$	
			$INFL$		$INFL$		
f:	∞		1		0		$-\infty$



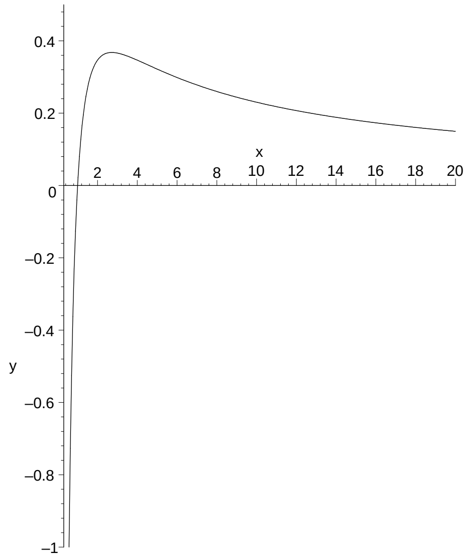
Bár a függvény $x = 1$-ben nem differenciálható, mégis van inflexiós pontja, mert konkávból konvexbe vált, és van (függőleges) érintője. $R(f) = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$-re $D(f) = (0, +\infty)$, f folytonos ezen a tartományon, nem páros és nem páratlan, és az $(1, 0)$ az egyetlen tengelymetszete. Függőleges aszimptotája csak 0-ban lehet, és ott van is, mert $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$. A ∞-ben $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, tehát $y = 0$ vízszintes aszimptota.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x}x^{-2} + (1 - \ln x)(-2)x^{-3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)$ az $\ln x = 1$, azaz $x = e$ helyen 0, és az egész $D(f)$-en értelmezve van. $f''(x)$ az $\ln x = \frac{3}{2}$, azaz $x = \sqrt{e^3}$ helyen 0, és $D(f)$-en értelmezve van.

$x:$	0		e		$\sqrt{e^3}$		∞
f'		$+$		$-$		$-$	
f''		$-$		$-$		$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	
f''		$\cap$		$\cap$		$\cup$	
			MAX		$INFL$		
$f:$	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		$\frac{3}{2\sqrt{e^3}}$		0



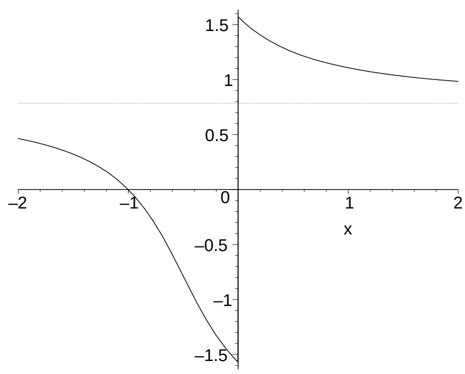
Az ábra alapján $R(f) = (-\infty, \frac{1}{e})$.

d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$-re $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert arctg mindenhol értelmezve van. A függvény nem páros és nem páratlan, a 0 kivételével mindenütt folytonos, és tengelymetszete csak a $(-1, 0)$ pontban van. Függőleges aszimptotája csak $x = 0$-ban lehet, de: $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, és $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$, tehát f-nek nincs függőleges aszimptotája. ∞-ben $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{4}$, tehát az $y = \frac{\pi}{4}$ egyenes vízszintes aszimptota.

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$$
$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$$

Az f' függvény mindig negatív, $f''(x) = 0$ teljesül $x = -\frac{1}{2}$-re. Ez előtt negatív, ez után pozitív az $f''(x)$ értéke.

$x:$	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		∞
f'		$-$		$-$		$-$	
f''		$-$		$+$		$+$	
		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	
f''		$\cap$		$\cup$		$\cup$	
			$INFL$				
$f:$	$\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$



$R(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

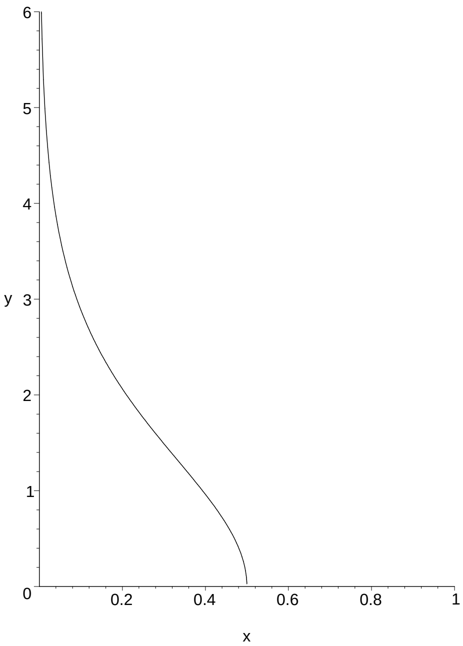
e) $f(x) = \operatorname{arch}(\frac{1}{x} - 1)$ azokra az $x \neq 0$ számokra van értelmezve, amelyekre $\frac{1}{x} - 1 \geq 1$, azaz $D(f) = (0, \frac{1}{2}]$, és itt a függvény folytonos. A függvény nem páros és nem páratlan, tengelymetszete $(\frac{1}{2}, 0)$. Ferde, illetve vízszintes aszimptotája nem lehet, függőleges aszimptotája 0-ban vagy $\frac{1}{2}$-ben lehet. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arch}(\frac{1}{x}-1) = +\infty$, és $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \operatorname{arch}(\frac{1}{x}-1) = 0$, tehát $x = 0$ az egyetlen aszimptota.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{x})^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x^3}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(x^2-2x^3)^{-3/2} \cdot (2x - 6x^2) = \frac{-x(1-3x)}{(x^2-2x^3)^{3/2}}$$

$f'(x) < 0$ az egész $(1, \frac{1}{2})$ intervallumban, $f''(x)$-nek $\frac{1}{3}$-ban van 0-helye, és $(1, \frac{1}{2})$-en ez is értelmezve van.

x:	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
f'		$-$		$-$	
f''		$-$		$+$	
f''		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$	
			INFL		
f:	∞		$\ln(2+\sqrt{3})$		0



Az $f(\frac{1}{3})$ értéket az $\operatorname{arch} 2 = x$, azaz $\operatorname{ch} x = 2$ $(x > 0)$ egyenletből számíthatjuk ki, amely a $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ és $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ behelyettesítés után e^x-re egy másodfokú egyenletet ad: $(e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$, és ennek a megoldása: $e^x = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Ebből $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$, de ezek közül csak a nagyobbik pozitív (azaz csak az van az arch értékkészletében), így $\operatorname{arch} 2 = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1,32$. $R(f) = [0, +\infty)$.