

8. matematika gyakorlat
Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény I., T – Thomas-féle kalkulus I.)

1. (Alapműveletek és deriválás) Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét (a derivált értelmezési tartományának megadásával együtt)!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{2}{x^{27}} + \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}, & \text{b)}^{\text{HF, B9.40}} \quad \frac{1}{x} + \sqrt{x^5}, & \text{c)}^{\text{HF, B9.39}} \quad 2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2x} \\ \text{d)} \quad x^3 \sin x & \text{e)} \quad \frac{e^x - \arcsin x}{x}, & \text{f)}^{\text{HF, B9.44}} \quad \frac{\sin x}{x} \\ \text{g)}^{\text{HF, B9.49}} \quad \frac{x^3 + 4}{1 + 2x} & \text{h)}^{\text{B9.45}} \quad \operatorname{tg} x, & \text{i)}^{\text{HF, B9.47}} \quad \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1} \end{array}$$

2. (Függvénykompozíció és deriválás) Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját! Milyen összetett függvények szerepelnek a függvények definíciójában?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sin(x^2) \cdot e^{3x}, & \text{b)} \quad \ln(\cos x) \cdot (x^3 + 2x^4)^7, & \text{c)} \quad \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 4)}{x^2 + 5x + 1}, \\ \text{d)} \quad e^{\sin(\ln x)} \cdot \operatorname{arctg} x^3 & \text{e)}^{\text{HF, B9.102}} \quad \sin(\cos(x^3)), & \text{f)}^{\text{HF, B9.103}} \quad \sqrt{\sin(x^2)} \end{array}$$

3.* (Folytonos differenciálhatóság) Igazoljuk, hogy az alábbi függvények mindenütt deriválhatóak, de 0-ban a deriváltjuk nem folytonos!

$$*\text{a)}^{\text{B9.99}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad *\text{b)}^{\text{HF}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(e^{1/x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

4. (Magasabbrendű deriváltak) Számítsuk ki az alábbi magasabbrendű deriváltakat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad (x^2 + 3x + 1)^{\text{II}}, & \text{b)} \quad (xe^x)^{(7)}, & \text{c)}^{\text{HF}} \quad (x \cos x)^{(2014)}, \\ \text{d)}^{\text{HF, B9.104}} \quad (\sin(3x + 7))^{\text{IV}} & \text{e)}^{\text{HF, B9.105}} \quad (\cos(4 - 2x))^{\text{(7)}}, & \text{f)}^{\text{HF, B9.106}} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(5)} \end{array}$$

5. (Implicit módon megadott függvény deriválása) Számítsuk ki az alábbi implicit módon megadott függvények (x_0, y_0) ponthoz tartozó deriváltját és adjuk meg az adott pontbeli érintő egyenes egyenletét!

$$\text{a)} \quad y^2 = x^2 + 3, \quad (1, -2) \quad \text{b)} \quad \cos y = \operatorname{ctg} x + y^2 - 4\pi^2, \quad \left(\frac{\pi}{4}, 2\pi\right) \quad \text{c)}^{\text{HF, B9.196}} \quad x^3 + y^3 - 6xy = 0, \quad (3; 3)$$

6. (Inverz függvény deriválása) Számítsuk ki az alábbi függvények inverz függvényének deriváltját az $(f(x_0), x_0)$ pontban és adjuk meg az adott pontbeli érintő egyenes egyenletét!

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 + 1, \quad x_0 = 2, \quad \text{b)}^{\text{HF, B9.189}} \quad f(x) = 7x - \sin(3x), \quad x_0 = 0$$

7. (Paraméteresen megadott függvény deriválása) Számítsuk ki az alábbi paraméteresen megadott függvények (\dot{x}, \dot{y}) deriváltvektorának hosszát és a $(x(t_0), y(t_0))$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x(t) = 5 \cos(2t) \\ y(t) = 5 \sin(2t) \end{cases}, \quad t_0 = \pi, \quad \text{b)}^{\text{HF}} \quad \begin{cases} x(t) = 3 \cos(t^2) \\ y(t) = 3 \sin(t^2) \end{cases}, \quad t_0 = \sqrt{\pi}$$

8. (Függvény megváltozásának becslése)

a) Aszinkron motorral működtetett fűrészgép leadott nyomatéka ($[P]=\text{Nm}$) a fordulatszámától ($[n]=\text{fordulat/sec}$) közelítőleg a $P(n) = -\frac{1}{10}n^{1.5} + n + 15$ függvény szerint változik. A gép egy faanyagot 25 ford/sec fordulatszámmal fűrészel. A fában a fűrészlappal egy csomóhoz érkezik, ami a leadott nyomatékot 2Nm-rel növeli. Mennyivel nő ekkor a gép fordulatszáma?

b)^{HF} (vö.: T3.7.16) Az Óbudai Hajógyárban egy több méter átmérőjű, 20 cm magas tárcsát egy karusszeleszterga munkál meg. A gép fordulatszáma úgy van beállítva, hogy 10 perc alatt esztergáljon le a tárcsa sugarából 4mm-t. Mekkora térfogatnyi forgács keletkezik percnként, amikor a gép 2,8 m sugáron dolgozik?

c)^{HF} (vö.: T3.7.17) Egy konténerből percnként 10 m^3 térfogatú sódert öntenek egy kúp alakú sóderkúp tetejére. A kúp magassága mindvégig az alapkör átmérőjének egyharmada. Mennyivel nő a kúp magassága és alapkörének átmérője percnként, amikor a kúp magassága 4 m?