1. Írjuk fel az $f(x)$ függvény lineáris közelítését az x_0 pontban, és ezt felhasználva adjunk becslést a megadott c számra.

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x_0 = 16, \quad c = \sqrt[4]{18}$

b) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1, \quad c = 1{,}038^5$

2. Az alábbi limeszek közül melyikeknél alkalmazható a L'Hospital-szabály? Számítsuk ki a határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3-2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$ g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ h) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények hol monoton fogyók, illetve növők, és keressük meg a lokális szélsőértékeiket!

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2x$ c) $f(x) = \sqrt{x}e^{1/x}$

4. A függvény menetének a vizsgálatából állapítsuk meg, hány valós gyöke az $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ polinomnak.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} x > x$, ha $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

6. Hol vannak lokális szélsőértékei, hol konvexek, illetve konkávak az alábbi függvények?

a) $(x^2 - 2x)e^x$ b) $\arcsin x^2$

7. Mi az abszolút minimuma és maximuma az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon?

a) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}x^2$ a $[-1, \sqrt{8}]$-on

b) $x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ a $[-6, 6]$-on

c) $x + \ln(x^2 - 3)$ a $[-10, -2]$-n.

Megoldások

1. Az $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ közelítést használjuk x_0-hoz közeli x értékekre.

a) $f(x) = x^{1/4}$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, $f(x_0) = f(16) = 2$, $f'(x_0) = f'(16) = \frac{1}{32}$, $\sqrt[4]{18} = f(18) \approx f(16) + f'(16)(18 - 16) = 2 + \frac{1}{32} \cdot 2 = 2,0625 \approx 2,06$

b) $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$, $f(x_0) = f(1) = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 5$, $1,038^5 = f(1,038) \approx 1 + 5 \cdot 0,038 = 1,19$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3 - 2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2 - 2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = \infty$

c) Erre nem alkalmazható a L'Hospital-szabály, mert a számláló 0-hoz, a nevező viszont 1-hez tart, de nincs is rá szükség: a limesz $\frac{0}{1} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x \cos x}{2\cos x - x \sin x} = 0$

g) $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$, és $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$, így $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

h) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$, és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$,
így $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

3. a) Az f függvény mindenütt értelmezve van és folytonos. A deriváltja $f'(x) = \dfrac{(x^2+4) - x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$, ami $x = \pm 2$-nél 0, $(-\infty, -2]$-n és $[2, +\infty)$-en negatív, $[-2, 2]$-n pedig pozitív. Így f monoton növő a $[-2, 2]$ intervallumon, monoton fogyó $(-\infty, -2]$-n és $[2, +\infty)$-en. Ebből következik, hogy -2-ben van lokális minimuma (értéke $-\frac{1}{4}$) és 2-ben lokális maximuma (értéke $\frac{1}{4}$).

b) Az f függvény mindenütt értelmezve van és folytonos. A deriváltja $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - 2$, ami 0, ha $x = \frac{1}{27}$, és nincs értelmezve, ha $x = 0$. A derivált előjele: 0 előtt negatív, $0 < x < \frac{1}{27}$-re pozitív, $\frac{1}{27}$ után megint negatív. Tehát f monoton fogyó $(-\infty, 0)$-n és $[\frac{1}{27}, +\infty)$-en, monoton növő $(0, \frac{1}{27}]$-en, lokális minimuma van 0-ban (értéke 0), és lokális maximuma $\frac{1}{27}$-ben (értéke $\frac{1}{27}$).

c) Az f függvény értelmezési tartománya $(0, +\infty)$, és itt folytonos is. A deriváltja $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{1/x} - \sqrt{x}e^{1/x}\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-2}{2x\sqrt{x}}e^{1/x}$. Ez csak $x = 2$-ben 0, előtte negatív, utána pozitív, így f-nek 2-ben lokális minimuma van, amelynek értéke $\sqrt{2e}$.

4. Az $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$ függvény 0-helyei -5 és 1, és az $f'(x)$ előjeléből kiderül, hogy f monoton növő a $(-\infty, -5]$ és $[1, +\infty)$ intervallumokon, és monoton fogyó a $[-5, 1]$ intervallumon. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-5) = 103$, $f(1) = -5$, és $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, tehát a folytonos függvény a $(-\infty, -5)$, $(-5, 1)$ és $(1, +\infty)$ intervallumok mindegyikében metszi egyszer az x tengelyt, így pontosan három valós gyöke van az $f(x)$ polinomnak.

5. Legyen $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Ez a függvény folytonos a $[0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, és deriváltja $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ az intervallum belsejében (ugyanis ott $\cos^2 x < 1$), így $f(x)$ szigorúan monoton növő a $[0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon. Mivel $f(0) = 0$, a $(0, \frac{\pi}{2})$ nyílt intervallumon $f(x) > 0$, azaz $\operatorname{tg} x > x$.

6. a) Ha $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$, akkor $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$, és $f''(x) = 2xe^x + (x^2 - 2)e^2 = (x^2 + 2x - 2)e^x$. Az $f'(x)$ függvény 0-helyei $\pm\sqrt{2}$, az $f''(x)$ függvényé $-1 \pm \sqrt{3}$. A $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ és $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ intervallumokon $f''(x) > 0$, így $f(x)$ itt konvex, a $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ intervallumon pedig $f''(x) < 0$, és $f(x)$ konkáv. Szélsőértéke $f(x)$-nek az $f'(x)$ 0-helyein lehet, azaz $\pm\sqrt{2}$-ben, és ezek közül $-\sqrt{2}$-ben lokális maximuma van f-nek, mert $f''(-\sqrt{2}) < 0$, és $\sqrt{2}$-ben lokális minimuma van f-nek, mert $f''(\sqrt{2}) > 0$.

b) Ha $f(x) = \arcsin x^2$, akkor $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ és $f''(x) = (2x(1 - x^4)^{-1/2})' = 2(1 - x^4)^{-1/2} + 2x(1 - x^4)^{-3/2} \cdot (-\dfrac{1}{2}) \cdot (-4x^3) = \dfrac{2 - 2x^4 + 4x^4}{(1 - x^4)^{3/2}} = \dfrac{2 + 2x^4}{(1 - x^4)^{3/2}}$. Az $f''(x)$ függvény pozitív az f teljes értelmezési tartományának belsejében, $(-1, 1)$-en, tehát a folytonos f függvény konvex a $[-1, 1]$ intervallumon. $f'(x)$ csak 0-ban vesz fel 0-t (és f' létezik az f értelmezési tartományának belsejében), tehát csak itt lehet szélsőértéke az f függvénynek, és mivel $f''(0) > 0$, f-nek itt lokális minimuma van.

7. a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}x^2$, $\quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x^{-1/3}(1 - x^{4/3})$. f'-nek 0-helye ±1-ben van, ebből az 1 van a $(-1, \sqrt{8})$ intervallumban, f' nem létezik a 0-ban. Így a szélsőértékek lehetséges helyei -1, 0, 1, $\sqrt{8}$. Itt az f értékei $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{2}{3}$, illetve $-\frac{2}{3}$, így a maximum $\frac{2}{3}$, a minimum $-\frac{2}{3}$.

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $\quad f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$, ennek 0-helyei -5 és 1 (mindegyik a $(-6, 6)$ intervallumban), és f' mindenhol létezik. Tehát a lehetséges szélsőértékhelyek -6, -5, 1 és 6, az f értékei itt 93, 103, -5 és 345, így a minimum -5, a maximum 345.

c) $f(x) = x + \ln(x^2 - 3)$, $\quad f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2 - 3} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3}$. Az f' 0-helyei a számláló 0-helyei: -3 és 1, ebből -3 van a megadott intervallumban. f' nem létezik ott, ahol a nevező 0, azaz $\pm\sqrt{3}$-ban, de ezek az intervallumon kívül esnek. Így az f szélsőértékei csak a -10, -3, -2 helyek közül valók lehetnek. $f(-10) = -10 + \ln 97$, , $f(-3) = -3 + \ln 6$, $f(-2) = -2$, ezek közül $f(-10) = -10 + \ln 97$ a minimum, és $f(-3) = -3 + \ln 6$ a maximum.