6. matematika gyakorlat
Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz
*($^{\mathrm{HF}}$ – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat)*

1. *(Pontbeli folytonosság, szakadás)* Folytonosak-e az alábbi függvények az x_0 pontban, ha nem milyen típusú szakadásuk van?

a) $x_0 = 0,\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right) \setminus \{0\} \\ 5, & x = 0 \end{cases}$,

b)$^{\mathrm{HF}}$ $x_0 = 0,\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(\pi x)}{\pi x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$,

c) $x_0 = 0,\quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$,

d)$^{\mathrm{HF}}$ $x_0 = -1,\quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{x+1}{|x+1|}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$,

e) $x_0 = 1,\quad f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$,

f) $x_0 = -3,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & x \in (-3;0) \\ 2, & x = -3 \end{cases}$,

g)$^{\mathrm{HF}}$ $x_0 = 1,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & x \in [-3;+\infty) \setminus \{1\} \\ 0, & x = 1 \end{cases}$,

h)$^{\mathrm{HF}}$ $x_0 = 0,\quad f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

2. *(Folytonos kiterjeszthetőség)* Az a, b és c valós számok mely értékeire lesznek az alábbi függvények folytonosak?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(1+x)^3-1+x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$,

b)$^{\mathrm{HF}}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x > 0 \\ bx + c, & x \leq 0 \end{cases}$,

d)$^{\mathrm{HF}}$ $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1 \end{cases}$,

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3}{x^2-1}, & |x| \neq 1 \\ a, & x = -1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$,

f)$^{\mathrm{HF}}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ a, & x = 0 \\ b, & x = \pi \end{cases}$

3. *(Bolzano-tétel)* Van-e és ha igen, hány zérushelye van az alábbi függvényeknek?

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ x \mapsto -\frac{1}{x} + x^3 + x^5$, b)$^{\mathrm{HF}}$ $f : (-1, +\infty) \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{1}{x+1}$

4. *(Pontbeli deriválhatóság)* Számítsuk ki az alábbi függvények nullabeli deriváltját, ha deriválhatóak a nullában!

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin \sqrt[3]{x}$, b) $g(x) = x|x|$, c) $h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

d)$^{\mathrm{HF}}$ $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}$, e)$^{\mathrm{HF}}$ $g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}x^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, f)$^{\mathrm{HF}}$ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

5. *(Deriválható kiterjeszthetőség)* Az a és b valós számok mely értékeire lesznek az alábbi függvények differenciálhatóak?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ ax^2 + b, & x \leq 0 \end{cases}$, b) $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$,

c)$^{\mathrm{HF}}$ $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ ax^3 + b, & x \leq 0 \end{cases}$, d)$^{\mathrm{HF}}$ $k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| > 1 \\ ax^2 + b, & |x| \leq 1 \end{cases}$,