1. Definíció alapján számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ pontban!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = 2x^3 - 1$

2. Differenciálhatók-e az alábbi függvények a 0-ban? Amelyik igen, annak számítsuk ki a deriváltját!

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

3. Ha $f'(2) = -3$, akkor mennyi a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$ határérték?

4. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

a) $3x^8 - 8\sqrt{x}$ b) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ c) $\frac{x^5+1}{2x^2+x}$ d) $\operatorname{tg} x$ e) $\sin(x^2+3)$
f) $\operatorname{tg}^3 x$ g) $\frac{1+\sin x}{x}$ h) $(x+2)\sqrt{x^3}$ i) $(x + \operatorname{tg} x)^{10}$ j) $\sin(\cos x^2)$
k) $\frac{x}{e^{2x}}$ l) $\ln(x^2+1)$ m) $2^{1/x}$ n) $\ln\left(\frac{x^5 \sin x}{x+1}\right)$ o) x^{2x+1}

5. Adjuk meg az alábbi függvények adott pontbeli érintőjét!

a) $f(x) = \sin\sqrt{x},\ \ x = \pi^2$ b) $f(x) = x^3 - 8x,\ \ x = 3$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-6}{x},\ \ x = 5$

6. Határozzuk meg azokat az x értékeket, ahol a $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ függvény grafikonjának vízszintes érintője van!

Megoldások

1. a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2(2+h)h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$.

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2(2+h)^3-1)-(2\cdot 2^3-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{24h+12h^2+2h^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 24+12h+2h^2 = 24.$

2. a) Nem differenciálható: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$, és $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ különbözők.

b) Nem differenciálható: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ nem létezik, mert a $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ függvény a 0-nak akármilyen kis környezetében felveszi az 1-et és a -1-et is, tehát nincs olyan szám, amihez a függvényérték 0-hoz elég közeli x esetén $\varepsilon = 1$-nél közelebb kerülne.

c) Differenciálható: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, ugyanis x 0-hoz tart, $\sin\dfrac{1}{x}$ pedig korlátos. (Megjegyzés: Ennek a függvénynek a deriváltja az $x\neq 0$ helyeken $2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, így a deriváltfüggvény — bár minden pontban értelmezve van — nem folytonos a 0-ban.)

3. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2)-f(2-h)}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h} = 2f'(2) = 6.$

4. a) $24x^7 - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ b) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$

c) $\dfrac{5x^4(2x^2+x)-(x^5+1)(4x+1)}{(2x^2+x)^2} = \dfrac{6x^6+4x^5-4x-1}{(2x^2+x)^2}$

d) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

e) $2x\cos(x^2+3)$ f) $3(\operatorname{tg}^2 x)\dfrac{1}{\cos^2 x}$ g) $\dfrac{(\cos x)x-(1+\sin x)}{x^2}$

h) $((x+2)\sqrt{x^3})' = (x^{5/2}+2x^{3/2})' = \frac{5}{2}x^{3/2}+3x^{1/2} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}+3\sqrt{x}$

i) $10(x+\operatorname{tg} x)^9(1+\frac{1}{\cos^2 x})$ j) $(\cos(\cos x^2))(-\sin x^2)(2x)$

k) $\left(\dfrac{x}{e^{2x}}\right)' = (xe^{-2x})' = e^{-2x}+xe^{-2x}\cdot(-2) = (1-2x)e^{-2x}$

l) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ m) $2^{1/x}(\ln 2)\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$

n) $\left(\ln\left(\dfrac{x^5\sin x}{x+1}\right)\right)' = (5\ln x+\ln(\sin x)-\ln(x+1))' = \dfrac{5}{x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x+1}$

o) $(x^{2x+1})' = (e^{\ln x^{2x+1}})' = (e^{(2x+1)\ln x})' = e^{(2x+1)\ln x}\left(2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right) =$
$= x^{2x+1}\left(2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right) = 2x^{2x+1}\ln x+(2x+1)x^{2x}$

5. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$, $f'(\pi^2) = -\dfrac{1}{2\pi}$, $f(\pi^2) = 0$, az érintő: $y = -\dfrac{1}{2\pi}(x - \pi^2)$, azaz $y = -\dfrac{1}{2\pi}x + \dfrac{\pi}{2}$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 8$, $f'(3) = 19$, $f(3) = 3$, az érintő: $y - 3 = 19(x - 3)$, azaz $y = 19x - 54$.

c) $f(x) = x - \dfrac{6}{x}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{6}{x^2}$, $f'(5) = \frac{31}{25}$, $f(5) = \frac{19}{5}$, az érintő: $y - \frac{19}{5} = \frac{31}{25}(x-5)$, azaz $y = \frac{31}{25}x - \frac{12}{5}$.

6. Ha $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, akkor $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x + 1 - 2x}{2(x+1)^2\sqrt{x}} = \dfrac{1 - x}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$, és ez csak $x = 1$-ben 0, tehát itt van vízszintes érintője az f függvénynek.