

**5. matematika gyakorlat**  
**Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz**

(<sup>HF</sup> – javasolt házi feladat, \* – nem kötelező, gondolkodtató feladat)

1. (Határérték és algebrai műveletek) Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1 - 4x}{x^2 + x^4}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2 - 9}{(2-x)^3 - 8} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}, & \text{h) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}, & \text{i) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x} \end{array}$$

2. (A függvényhatárérték definíciója) Definíció alapján igazoljuk az alábbi állításokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \exists \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}, & \text{b) }^{\text{HF}} \exists \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \in \mathbb{R}, & \text{c) } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}, & \text{e) } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{f) }^{\text{HF}} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

3. (Trigonometrikus függvények határértéke) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}, & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 2x}{x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{e) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - \sin x}{\sin^3 x}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x - \sin 2x}, \end{array}$$

4. (Határérték a végtelenben) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x), & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6} \end{array}$$

5. (Egyoldali határérték) Számítsuk ki az alábbi függvények egyoldali határértékeit az értelmezési tartományuk határpontjaiban és a tengelyirányú aszimptotáit (ha vannak)!

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{x + 1}{|x + 1|}, \quad \text{c) }^{\text{HF}} h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x < 2 \\ \frac{1}{x - 1} - 2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

6. (Határérték és rendezés) Számítsuk ki az alábbi határértékeket, esetleg az adott feltétel mellett!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2 + x^3}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, & \text{c) } \lim_1 f = ?, \text{ ha } \lim_1 |f| = 0, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \lim_0 f = ?, & \text{ha minden } x \in [-1; 1] \text{-re } \sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2} \end{array}$$

**5. matematika gyakorlat**  
**Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz**

(HF – javasolt házi feladat, \* – nem kötelező, gondolkodtató feladat)

1. (Határérték és algebrai műveletek) Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1 - 4x}{x^2 + x^4}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2 - 9}{(2-x)^3 - 8} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}, & \text{h) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}, & \text{i) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x} \end{array}$$

2. (A függvényhatárérték definíciója) Definíció alapján igazoljuk az alábbi állításokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \exists \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}, & \text{b) }^{\text{HF}} \exists \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \in \mathbb{R}, & \text{c) } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}, & \text{e) } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{f) }^{\text{HF}} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

3. (Trigonometrikus függvények határértéke) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}, & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 2x}{x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{e) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - \sin x}{\sin^3 x}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x - \sin 2x}, \end{array}$$

4. (Határérték a végtelenben) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x), & \text{b) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}, & \text{f) }^{\text{HF}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6} \end{array}$$

5. (Egyoldali határérték) Számítsuk ki az alábbi függvények egyoldali határértékeit az értelmezési tartományuk határpontjaiban és a tengelyirányú aszimptotáit (ha vannak)!

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{x + 1}{|x + 1|}, \quad \text{c) }^{\text{HF}} h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x < 2 \\ \frac{1}{x - 1} - 2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

6. (Határérték és rendezés) Számítsuk ki az alábbi határértékeket, esetleg az adott feltétel mellett!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2 + x^3}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, & \text{c) } \lim_1 f = ?, \text{ ha } \lim_1 |f| = 0, \\ \text{d) }^{\text{HF}} \lim_0 f = ?, & \text{ha minden } x \in [-1; 1]\text{-re } \sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2} \end{array}$$