1. A határértékek műveleti szabályait felhasználva számítsuk ki az alábbi limeszeket (ha csak egyoldali limesz létezik, akkor azt)!

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sin x + \dfrac{x}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{(1-x)^3}+\dfrac{1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{1-\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})^{-x^2}$

2. Alkalmas egyszerűsítés segítségével számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-2x^2}{8x^3+3}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x$

3. Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$, ha $a>0$, és $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$.

4. Számítsuk ki az alábbi limeszeket! Ahol szükséges, "gyöktelenítsük" a nevezőt vagy a számlálót!

a) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x+\frac{2}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+8}-2}$

5. A következő határértékek kiszámításánál használjunk trigonometrikus azonosságokat, illetve a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ határértéket!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x(\pi-x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$

6. a) Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x-1}$ függvénynek aszimptotája a $g(x)=2x+3$ függvény, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=0$.

b) Határozzuk meg a 4.c) feladat eredményének segítségével a $\sqrt{x^2+2x+3}$ függvény aszimptotáit $+\infty$-ben és $-\infty$-ben!

7. Hol folytonos az $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ függvény, és milyen típusúak a szakadásai?

8. Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az alábbi függvény mindenütt folytonos legyen!

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x^2-\sin^2 x}}{x}, & \text{ha } x<0\\ ax+b, & \text{ha } 0\le x\le 1\\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1\le x\end{cases}$$

9. Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ függvény összes aszimptotáját!

Megoldások

1. a) 2/7. (Az első tag a rendőrelv miatt tart 0-hoz (ha a sin függvény folytonosságát nem használjuk): $-|x-2| \le (x-2)\sin x \le |x-2|$).

b) $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

c) Nem létezik, de $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, és $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-3+(x-1)^2}{(x-1)^3}$. A kétoldali limesz nem létezik, de 1^--ban $\frac{-3}{0^-} = +\infty$, és 1^+-ban $\frac{-3}{0^+} = -\infty$.

e) $\infty^1 = \infty$.

f) $2^{-\infty} = 0$

2. a) $\dfrac{0}{0}$ típusú, de egyszerűsíthetünk a 0-hoz tartó tényezővel:
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(5x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$.

b) $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Emeljük ki a leggyorsabban ∞-hez tartó hatványt:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2})}{(1-\frac{1}{x^2})} = 5$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x^2}{8x^3+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4(1-\frac{2}{x^2})}{x^3(8+\frac{3}{x^3})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x^2})}{8+\frac{3}{x^3}} = \frac{\infty\cdot 1}{8} = \infty$.

d) $-\infty+\infty$ típusú. Hozzuk közös nevezőre, aztán a b), c) esethez hasonlóan alakítsuk:
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2-x^3-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 3$.

A főtagok kiemelésével könnyen látható, hogy $\frac{polinom}{polinom}$ alakú kifejezések limesze $\pm\infty$-ben megegyezik a főtagok hányadosának limeszével, így a b), c), d) feladatok megoldása ennek segítségével is kiszámítható: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-2x^2}{8x^3+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{8x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{8} = +\infty$, és d)-ben közös nevezőre hozás után $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$.

3. $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \dfrac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \le \dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$, ha $|x-a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, esetünkben $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ megfelel, hogy $0 < |x-a| < \delta$ esetén $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon$.

∞-ben: $\sqrt{x} > K$, ha $x > K^2$, tehát minden $K > 0$-hoz van olyan x_0 (esetünkben $x_0 = K^2$ megfelel), hogy $x > x_0$ esetén $\sqrt{x} > K$.

4. a) $\frac{0}{0}$ típusú; gyöktelenítés után lehet a 0-hoz tartó tényezővel egyszerűsíteni:
$\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{(\sqrt{x-2})^2-2^2}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$.

b) $\frac{\infty}{\infty}$ típusú; emeljük ki a legnagyobb x-hatványt: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^4}}{x+\frac{2}{x}} =$
$x \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}-2x^{4/3}}{x+\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}(1-2x^{-1/6})}{x(1+\frac{2}{x^2})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}(1-2x^{-1/6})}{1+\frac{2}{x^2}} = +\infty$.

c) $\infty-\infty$ típusú. A legnagyobb x-hatvány kiemelése csak $\infty\cdot 0$ típusú limeszhez vezetne, ezért előbb gyöktelenítünk. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=1.$

d) $\frac{0}{0}$ típusú. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(6x^2+3)-9x^2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{-3(x-1)(x+1)}=$ $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)}=\frac{6}{6}=1.$

e) $\frac{0}{0}$ típusú, az egyszerűsítéshez gyökteleníteni kell. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+8}-2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x((\sqrt[3]{x+8})^2+2\sqrt[3]{x+8}+4)}{(x+8)-8}=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt[3]{x+8})^2+2\sqrt[3]{x+8}+4=12.$

5. a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=$ $\frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos 4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}\cdot\frac{1}{\cos 4x}=4.$

c) $\frac{0}{0}$ típusú. Felhasználva, hogy $\sin x=\sin(\pi-x)$, az $y=\pi-x$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=$ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1$, így $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x(\pi-x)}=\frac{1}{\pi}$.

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{3}.$

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x-1}-(2x+3)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3-2x^2-x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x-1}=0.$

b) A 4.c) feladat megoldása szerint az $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$ függvényre $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-x=1$, így $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(x+1)=0$, vagyis $y=x+1$ aszimptotája a függvénynek a $+\infty$-ben. $-\infty$-ben viszont $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=$ -1, és $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+3}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}=-1$, tehát $-\infty$-ben az aszimptota $y=-x-2$.

7. Mivel mindenütt folytonos függvényekből raktuk össze alapműveletek segítségével, csak ott nem folytonos, ahol nincs értelmezve, azaz ahol $\cos x=1$, ez pedig az $x=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ helyeken van. Itt a függvény limesze: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim\limits_{x\to a}1+\cos x=$ $1+\cos a$ véges érték, ezért ezek megszüntethető szakadások.

8. $f(x)$ folytonos a $(-\infty,0)$, $(0,1)$ és $(1,\infty)$ intervallumok mindegyikén, mert az f-et itt definiáló függvények folytonosak. (Az első függvényről ugyan ellenőrizni kell, hogy valóban értelmezve van-e a tartományon, de geometriai okoskodással látható, hogy $x\geq\sin x$, ha $x\in[0,\frac{\pi}{2})$, és $x\geq\frac{\pi}{2}>1\geq|\sin x|$, ha $x\geq\frac{\pi}{2}$, végül $x<0$-ra $x^2-\sin^2x=(-x)^2-\sin^2(-x)\geq 0$, tehát $2x^2-\sin^2x\geq x^2\geq 0$.) Így csak azt kell megnézni, hogy milyen feltételek mellett egyezik meg az illesztési pontban a jobb- és bal oldali határérték és a függvényérték.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2x^2-\sin^2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|\sqrt{2-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{2-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=-1$, míg $f(0)=b=\lim\limits_{x\to0^+}ax+b=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, tehát a függvény akkor és csak akkor folytonos 0-ban, ha $b=-1$. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}ax+b=a+b=f(1)$, míg $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x}=1$, így

$a + b = 1$, ami $b = -1$ mellett akkor és csak akkor teljesül, ha $a = 2$. Tehát f akkor és csak akkor folytonos mindenütt, ha $a = 2$ és $b = -1$.

9. f folytonos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$-en, tehát függőleges aszimptotája legföljebb $x = 1$-ben lehet. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, tehát $x = 1$ valóban aszimptota. f limesze ∞-ben ∞, $-\infty$-ben $-\infty$, tehát itt vízszintes aszimptota nem lehet. Ellenőrizzük, hogy van-e ferde aszimptotája a függvénynek ∞-ben, illetve $-\infty$-ben! $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, és $\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$, tehát ∞-ben $y = 2x+1$ aszimptota, és könnyen látható, hogy $-\infty$-ben is ugyanezeket a limeszeket kapjuk, tehát ott is ugyanez a ferde aszimptota van. (A ferde aszimptotákat ebben az esetben polinomosztással is megtalálhatjuk: $\frac{2x^2-x}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = (2x+1) + \frac{1}{x-1}$, és a második tag a végtelenekben 0-hoz tart, így $f(x) - (2x+1)$ 0-hoz tart, azaz $y = 2x+1$ aszimptotája a függvénynek mindkét végtelenben.)