1. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott három pont egy egyenesbe esik-e; ha nem, írjuk fel a megadott pontokon áthaladó sík egyenletét!

a) $P(-3,0,4), Q(4,1,2), R(0,0,0)$, b) $P(-2,3,1), Q(0,5,2), R(-4,1,0)$

2. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét (explicit és implicit és normál), amely átmegy az $A(1,5,2)$ ponton és párhuzamos a $7x-y+3z=0$ egyenletű síkkal!

3. (**Hf**) Adott két pont: $A(2,1,-3)$ és $B(-1,0,1)$. Írjuk fel annak a síknak az explicit (majd implicit) egyenletét, amelyik átmegy az adott pontokon és párhuzamos a $\mathbf{v}=(3,-2,0)$ vektorral!

4. Írjuk fel az egyenesek explicit (paraméteres) és implicit (nem paraméteres) egyenletét!

a) (**Hf**) Átmegy az $A(-2,5,1)$ ponton és párhuzamos az $\mathbf{a}=(-1,2,3)$ vektorral.

b) Átmegy a $P(3,1,2)$ és $Q(-1,1,3)$ ponton.

c) (**Hf**) Párhuzamos a $\mathbf{j}=(0,1,0)$ vektorral, és átmegy az $A(5,1,4)$ ponton.

d) Párhuzamos a $3x+y-z+1=0$ és az $x+y+z=0$ egyenletű síkkal, és metszi az yz tengelysíkot a $P(0,4,1)$ pontban.

5. Határozzuk meg a sík és az egyenes közös pontját, ha van ilyen.

a) $e: x=3-t, y=2-t, z=3-t,\ S: -2x+y+3z-3=0$

b) $e: x+2=y-3=\dfrac{z+1}{3},\ S: x+2y-z+2=0$

6. Állapítsuk meg az egyenesek kölcsönös helyzetét (azonos; párhuzamos, de nem azonos; metsző; kitérő)! Ha metszőek, adjuk meg a metszéspontjukat.

$e:\ \ x=3+4t,\ y=2t,\ z=-1-2t;$

$f:\ \ x-2=z+1,\ y=2;$

$g:\ \ \dfrac{x+1}{2}=y+2=1-z;$

$h:\ \ x=2+t,\ y=-1,\ z=1+t.$

7. (**Hf**) Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az $A(1,2,3)$ és $B(-1,0,1)$ pontokon, és párhuzamos az $x=1,\ y=2-t,\ z=4+t$ egyenessel.

8. Tükrözzük az $A(2,-1,3)$ pontot az $x=3t,\ y=5t-7,\ z=2t+2$ egyenletrendszerű e egyenesre! Adjuk meg az A pont távolságát az e egyenestől!

9. (**Hf**) Tükrözzük az $A(-4,9,-5)$ pontot az $S:\ \ 3x-4y+z=-1$ síkra és adjuk meg a pont és a sík távolságát!

10. (**Hf**) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(-1,2,-3)$ ponton, merőleges az $\mathbf{a}=[6,-2,-3]$ vektorra, és metszi az $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{3-z}{5}$ egyenletrendszerű egyenest!

11. (**Hf**) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét (ha van ilyen egyenes),amely merőleges a $2x+4y-z+5=0$ egyenletű síkra és metszi a következő egyenletrendszerű egyeneseket:

$$e:\ \ \frac{x}{2}=-y=z,\quad f:\ \ \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{3}.$$

12. (**Hf**) Határozzuk meg a $P(-2,3,7)$ pont távolságát az $e:\ \dfrac{x-1}{3}=2-y,\ z=2$ egyenestől!

Megoldások

3. $\overrightarrow{AB} = (-3,-1,4)$ és $\mathbf{v} = (3,-2,0)$ párhuzamos a síkkal. Ezekből kifejezhető a sík paraméteres (explicit) egyenlete: $(x,y,z) = (-1,0,1) + t(-3,-1,4) + s(3,-2,0)$, vagy komponensekre bontva

$$\begin{array}{rcrrr} x & = & -1 & -3t & +3s \\ y & = & & -t & -2s \\ z & = & 1 & +4t & \end{array} .$$

$\overrightarrow{AB}\times\mathbf{v} = (8,12,9)$ normálvektora a síknak, és a sík implicit egyenlete: $8x+12y+9z-1=0$.

4. a) $x=-2-t,\ y=5+2t,\ z=1+3t$ az explicit, $-x-2 = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ az implicit egyenletrendszer.

c) $x=5,\ y=1+t,\ z=4$ az explicit, $x=5,\ z=4$ az implicit (paramétermentes) egyenletrendszer.

7. Az egyenes irányvektora $\mathbf{v}=(0,-1,1)$, a keresett sík normálvektora $\mathbf{v}\times\overrightarrow{BA} = (0,-1,1)\times(2,2,2) = (-4,2,2)$, vagy akár a vele párhuzamos $(2,-1,-1)$. A sík egyenlete $2(x+1)-y-(z-1)=0$, azaz $2x-y-z+3=0$.

9. Az A-ból S-re bocsátott merőleges egyenes $e:\ x=-4+3t,\ y=9-4t,\ z=-5+t$, ennek metszéspontja a síkkal a $t=2$ paraméterértéknél van, $M(2,1,-3)$, az A tükörképe pedig $A'(8,-7,-1)$.

Másképp: A sík egy pontja $P(0,0,-1)$, és $\overrightarrow{MA}$ a $\overrightarrow{PA}$ vetületvektora a sík normálvektorára, azaz $\overrightarrow{MA} = (-6,8,-2)$, amiből $M(2,1,-3)$, és $A'(8,-7,-1)$.

$d(A,S) = d(A,M) = 2\sqrt{26}$. A pont és a sík távolságát az $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{|(a,b,c)|} = \dfrac{|3\cdot(-4)-4\cdot 9+1\cdot(-5)+1|}{|(3,-4,1)|} = \dfrac{52}{\sqrt{26}} = 2\sqrt{26}$ képlettel is kiszámolhatjuk.

10. A keresett e egyenes rajta van a P-n átmenő, $\mathbf{a}$ normálvektorú S síkon: $6x-2y-3z+1=0$. Így a megadott egyenest csak a síknak és annak az egyenesnek a metszéspontjában metszheti. A megadott egyenes paraméteresen felírva: $f:\ x=1+3t,\ y=-1+2t,\ z=3-5t$, és az S-sel vett metszéspontja $M(1,-1,3)$. A P-n és M-en átmenő e egyenes egyenletrendszere: $x=-1+2t,\ y=2-3t,\ z=-3+6t$.

11. A keresett g egyenes irányvektora az adott sík normálvektora: $\mathbf{v}=(2,4,-1)$. Keresni kell a két egyenesen egy-egy pontot, amelyeket összekötő vektor ezzel párhuzamos. e tetszőleges pontja $P(2t,-t,t)$, f tetszőleges pontja $Q(2+3s,1+5s,3s)$ alakú. $\overrightarrow{PQ} = (2+3s-2t, 1+5s+t, 3s-t)$, és a $\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{v} = (-1-17s+3t, 2+9s-4t, 6+2s-10t)$ kell, hogy $\mathbf{0}$ legyen. Ez $t=\frac{25}{41}$ és $s=\frac{2}{41}$ paraméterértékeknél megvalósul, azaz $P(\frac{50}{41},-\frac{25}{41},\frac{25}{41})$ és $Q(\frac{88}{41},\frac{51}{41},\frac{6}{41})$ a metszéspontok, és a g egyenes egyenletrendszere $x=\frac{50}{41}+2t,\ y=-\frac{25}{41}+4t,\ z=\frac{25}{41}-t$.

12. e paraméteresen: $x=1+3t,\ y=2-t,\ z=2$, irányvektora $\mathbf{v}=(3,-1,0)$, egy pontja pedig $A(1,2,2)$. A pont és az egyenes távolságát megkapjuk az $\dfrac{|\overrightarrow{AP}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{|(5,15,0)|}{|(3,-1,0)|} = 5$ képletből.