3. matematika gyakorlat
Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz

($^{\mathrm{HF}}$ – *javasolt házi feladat*, * – *nem kötelező, gondolkodtató feladat*, B – *Babcsányi feladatgyűjtemény I.*)

1. Legyen az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ szabályos hatszög középpontja O. Fejezzük ki az alábbi vektorokat az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OA_2}$ vektorok segítségével!

a) $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_3A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$, b)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.4) $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, $\overrightarrow{A_6A_1}$, c)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.4) $\sum_{i=1}^{6} \overrightarrow{OA_i}$

2. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon, mint ferde hasáb alapja az $ABCD$ paralelogramma, fedőlapja a $\mathbf{c} = \overrightarrow{AA_1}$ vektorral eltolt $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma. Legyen H a D_1B testátló D_1-hez közelebbi negyedelőpontja, K a C_1D_1 él felezőpontja, F a BCC_1B_1 oldallap középpontja! Fejezze ki az $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ és $\mathbf{c}$ vektorok segítségével az alábbi vektorokat!

a) A-ból a HFK háromszög súlypontjába mutató vektort, b)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.38) $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HK}$

3. (B4.36) Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független! Az α és β skalárok mely értékeire lesznek az alábbi $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok kollineárisak?

a) $\begin{array}{l} \mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \\ \mathbf{w} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \end{array}$, b) $\begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b} \\ \mathbf{w} = 2\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c} \end{array}$, c) $\begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} \\ \mathbf{w} = 3\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$

d)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{v} = 5\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + 3\mathbf{c}, \\ \mathbf{w} = \mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$, e)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + 2\mathbf{c} \\ \mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$, f)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{v} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} \end{array}$

4. (B4.37) Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független! Döntsük el, hogy az $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ vektorrendszer lineárisan független vagy sem!

a) $\begin{array}{l} \mathbf{r} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{array}$, b) $\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = -2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c} \\ \mathbf{t} = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$, c) $\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \end{array}$,

d)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$, e)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} \\ \mathbf{s} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c} \end{array}$, f)$^{\mathrm{HF}}$ $\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{a} \\ \mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \end{array}$

5. a) Az $ABCD$ téglalap AB oldala 5 egység, AD oldala 4 egység hosszú. Az AB oldal A-hoz közelebbi ötödölőpontja E, a következő ötödölőpontja F, a BC oldal felezőpontja G. Igazoljuk vektoralgebrai eszközökkel, hogy a DF szakasz merőleges az EG szakaszra!

b)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.65) Legyen $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge 120°! Mennyi legyen a t paraméter értéke, hogy a $t\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ és a $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorok egymásra merőlegesek legyenek?

6. Igazak-e minden *nemnulla* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorra az alábbi kijelentések:

a) $\mathbf{ab} = \mathbf{ac} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$, b) (B4.94) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$, c) (B4.98) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a} - \mathbf{d} \parallel \mathbf{b} - \mathbf{c}$

7. a) (B4.73) Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$-re! Számítsuk ki a két vektort, ha $\mathbf{a} = (3; 2; 2)$ és $\mathbf{b} = (4; -2; 2)$!

b)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.108) Adott három, közös kezdőpontból kiinduló $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 2)$ vektor. Bontsuk föl a $\mathbf{c}$ vektort két olyan komponensre, melynek egyike az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkkal párhuzamos, a másik erre merőleges!

8. (B4.107) Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor, $\mathbf{a}$ tetszőleges vektor! Mi az $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$ szám és az $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ vektor jelentése? Adjunk ez alapján a 7. a) feladatra másik megoldást!

9. a) (B4.120) Az α paraméter mely értékeire lesz az $\{(0; 2; 3), (\alpha; -1; 2), (1; 2; 1)\}$ vektorrendszer lineárisan független?

b)$^{\mathrm{HF}}$ (B4.122) Mennyi az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (6; 1; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (1; 1; 2)$?