1. Egy egységélű kocka alaplapja $ABCD$ fedőlapja pedig $A_1B_1C_1D_1$, ahol az egyes csúcsok az alap azonos betűvel jelzett csúcsa fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezéseket (ahol az eredmény vektor, azt a kocka valamely két csúcsát összekötő vektorként adjuk meg).

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1}$ d) $|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB}\,|$ e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A}$

2. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

3. Egyszerűsítsük a következő szorzatokat:

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ vegyesszorzat

4. Ha $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorok, és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, akkor mennyi $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$?

5. Bizonyítsuk be, hogy $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{a}$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel vagy $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re. (Úgy tekintjük, hogy a $\mathbf{0}$ vektor mindennel párhuzamos és mindenre merőleges.)

6. Legyen $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ és $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$.

a) Számítsuk ki a következő kifejezéseket:

$$\mathbf{uv} \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \qquad \mathbf{uvw} \qquad (\mathbf{uv})\mathbf{w} \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

b) Keressünk $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$-hez olyan vektort, amely mindkettőre merőleges.

7. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ vektor vetületét a $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ vektorra! Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort egy $\mathbf{b}$ vektorra merőleges és egy $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos vektor összegeként!

8. a) Mekkora a $(2, -1)$ és $(-1, 3)$ vektorok szöge?

b) Milyen t értékre lesz az $(1, t, 1)$ és $(t, -1, 1)$ vektorok szöge $60°$?

c) Tegyük fel, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge?

9. Mekkora az $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 2, 1)$ csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata?

10. Lineárisan összefüggők-e, illetve a t milyen értékére lineárisan összefüggők az alábbi vektorrendszerek?

a) $\{(1, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 2)\}$

b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

c) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

d) $\{(2, t, 1), (4, 3t, 2)\}$

e) $\{(1, 2, t), (0, t, -1), (1, 0, 3)\}$

11. Írjuk föl, az $(1, 2, 3)$ vektort a 10.c) feladat vektorainak lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

12. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ vektorok?

Megoldások

1. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{C_1B}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})+(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B})=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=1$

d) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD_1}$ merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, így összegük hossza a Pithagorasz-tétel szerint $\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}=\sqrt{(1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 90^\circ)^2+1^2}=\sqrt{3}$

e) Az ACD_1 háromszög minden oldala $\sqrt{2}$ hosszú, tehát a háromszög szabályos, és így $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD_1}$ szöge 60°, az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{D_1A}$ szöge pedig 120°. Tehát $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{D_1A}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 120^\circ=-1$.

2. Nem igaz. Legyen például $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két azonos hosszúságú, de nem párhuzamos vektor, és $\mathbf{c}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjára. Ekkor $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, de $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$.

3. a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}+\mathbf{ba}-\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}+\mathbf{ab}-\mathbf{b}^2=|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2$.

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{0}=-2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{aab}+\mathbf{aac}+\mathbf{bab}+\mathbf{bac}=0+0+0+\mathbf{bac}=\mathbf{bac}$, mert egy síkban levő vektorok vegyesszorzata 0.

4. $0=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)^2=\mathbf{e}_1^2+\mathbf{e}_2^2+\mathbf{e}_3^2+2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)=3+2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, így $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=-\frac{3}{2}$. Vagy geometriailag: a három vektor egy egység oldalú szabályos háromszöget alkot, amelynek az oldalai egy adott körüljárás szerint vannak irányítva, tehát bármely két egymást követő vektor szöge 120°, skalárszorzata pedig $-\frac{1}{2}$, így a keresett kifejezés $-\frac{3}{2}$.

5. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak, akkor már az első vektoriális szorzat $\mathbf{0}$, ha merőlegesek (és egyik sem $\mathbf{0}$), akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának normálvektora, és $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ ebben a síkban $\mathbf{a}$-ra merőleges vektor, tehát $\mathbf{b}$-vel párhuzamos, és így $((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy teljesül az egyenlőség, és feltehetjük, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel. Ha ez nem $\mathbf{0}$, de $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ igen, akkor $\mathbf{a}$ párhuzamos a $\mathbf{b}$-re merőleges nem nulla $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorral, tehát $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re. Végül ha ez a szorzat sem $\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$ párhuzamos az $\mathbf{a}$-ra merőleges nem nulla $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$ vektorral, így $\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra.

6. a) $\mathbf{uv}=(1,2,1)(0,1,-1)=0+2-1=1$,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-3)-\mathbf{j}(-1)+\mathbf{k}\cdot 1=(-3,1,1),$$

$\mathbf{uvw}=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\mathbf{w}=(-3,1,1)(1,0,0)=-3+0+0=-3$,

$(\mathbf{uv})\mathbf{w}=1\cdot\mathbf{w}=(1,0,0)$, és

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(-3,1,1)\times(1,0,0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-3&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot 0-\mathbf{j}(-1)+\mathbf{k}(-1)=(0,1,-1).$$

b) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(-3,1,1)$ ilyen, továbbá ennek bármely skalárszorosa is.

7. A vetület $\mathbf{a}'=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\frac{1}{2}(0,1,-1)=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, és $\mathbf{a}-\mathbf{a}'=(1,1,0)-(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a kiegészítő vektor: $(1,1,0)=(0,\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

8. a) A két vektor szögének koszinusza $\dfrac{(2,-1)(-1,3)}{|(2,-1)|\cdot|(-1,3)|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, így a vektorok szöge $120°$.

b) Ha φ a két vektor szöge, akkor $\cos\varphi = (1,t,1)(t,-1,1)/(|(1,t,1)|\cdot|(t,-1,1)|) = 1/(t^2+2)$. Akkor lesz $\varphi = 60°$, ha $1/(t^2+2) = 1/2$, azaz $t = 0$.

c) A feltételből következik, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-2\mathbf{b})^2$, azaz $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{ab} = \mathbf{a}^2+4\mathbf{b}^2-4\mathbf{ab}$. Ebből $6\mathbf{ab} = 3\mathbf{b}^2$, és a két vektor szögének koszinusza $\mathbf{ab}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|) = \mathbf{ab}/|\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{2}$. Tehát a két vektor szöge $60°$.

9. Az $(1,0,-1)$ csúcsból kiinduló élvektorok $(1,2,4)$, $(-1,1,1)$ és $(0,2,2)$, az ezek által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 2\cdot(-2) + 4\cdot(-2) = -4$, a tetraéder térfogata pedig a paralelepipedon térfogatának hatodrésze: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

10. a) Összefüggők, mert a második vektor kétszerese az elsőnek (vagy: $2\cdot\mathbf{v}_1 - 1\cdot\mathbf{v}_2 + 0\cdot\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ nem triviális lineáris kombináció, ami a $\mathbf{0}$ vektort adja).

b) Összefüggők, mert a harmadik vektor az első kettőnek az összege.

c) Függetlenek: ha $x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1) = (0,0,0)$, akkor $(x+y+z, y+z, z) = (0,0,0)$, és így $z=0$, $y=0$ és $x=0$. (Vagy: $\mathbb{R}^3$ három nem egy síkban fekvő vektora mindig független.)

d) Két vektor csak akkor lehet összefüggő, ha valamelyik a másiknak skalárszorosa, s mivel egyik vektor sem $\mathbf{0}$, ez a skalár nem 0, és így bármelyik vektor a másik skalárszorosa. Legyen $(4,3t,2) = \lambda(2,t,1)$. Az első komponens miatt $\lambda = 2$, és így $3t = 2t$, azaz $t = 0$. Ebben az esetben pedig valóban összefüggők: $(4,0,2) = 2(2,0,1)$.

e) $\mathbb{R}^3$-ben három vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak, azaz a vegyes szorzatuk 0. Ennek a három vektornak a vegyes szorzata $-t^2+3t-2$, és ez $t=1$ és $t=2$ esetén 0.

11. $(1,2,3) = x(1,0,0)+y(1,1,0)+z(1,1,1) = (x+y+z, y+z, z)$, ebből $z = 3$, $y = 2-z = -1$, és $x = 1-y-z = -1$, azaz $(1,2,3) = -(1,0,0)-(1,1,0)+3(1,1,1)$.

12. Tegyük fel, hogy valamely x, y, z skalárokra $x(\mathbf{a}+\mathbf{b})+y(\mathbf{b}+\mathbf{c})+z(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok szerint rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy $(x+z)\mathbf{a}+(x+y)\mathbf{b}+(y+z)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok függetlenségéből következik, hogy $x+z = x+y = y+z = 0$, és könnyen látható, hogy ennek csak $x=y=z=0$ a megoldása, így $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ is lineárisan függetlenek.