2. matematika gyakorlat
Közlekedésmérnöki Kar, 2014 ősz

*(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B *– Babcsányi feladatgyűjtemény I.)*

1. Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi számokat, ha $z_1 = 2 + i$ és $z_2 = 1 - i$!

$$\text{a)}\quad \overline{z_1}, \qquad \text{b)}\quad z_1\overline{z_1}i, \qquad \text{c)}\quad z_1 + z_2, \qquad \text{d)}\quad z_1 - z_2$$

2. Hozzuk algebrai alakra a következő kifejezéseket!

$$\text{a)}\quad \frac{2+i}{2-i}, \qquad \underset{\text{(B6.16)}}{\text{b)}}\quad \frac{2}{(1-i)(3-i)}, \qquad \underset{\text{(B6.19)}}{\text{c)}^{\text{HF}}}\quad \frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\text{a)}\quad z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{\sqrt{3}}{8}i = 0, \qquad \underset{\text{(B6.45)}}{\text{b)}^{\text{HF}}}\quad z^4 - z^2 - 6 = 0, \qquad \text{c)}^{\text{HF}}\quad (5i+12)\cdot\overline{z+i} = 1$$

4. a) (vö.: B6.56) Igazoljuk, hogy a $z^2+z+1=0$ egyenlet megoldásai a harmadik egységgyökök közül kerülnek ki és számítsuk is ki a gyökeit!

b)$^{\text{HF}*}$ Legyen z olyan komplex szám, melyre $z^6 - z^3 + 1 = 0$ teljesül. Mondjunk végtelen sok olyan $n \in \mathbb{Z}$ számot, amire $z^n = 1$!

5. a) Forgassuk el a $|z - 5 - i| = 5$ egyenletű kört az $1 + 4i$ pont körül $-120°$-kal és írjuk fel az így nyert kör egyenletét!

b)^{HF}(B6.135) Adjuk meg az olyan négyzetek további csúcspontjait, melyeknek két csúcsa $-4 + i$ és $3 - 3i$!

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet ill. egyenletrendszert, ahol $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ és $x, y \in \mathbb{R}$!

$$\underset{\text{(B6.50)}}{\text{a)}}\quad \begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}, \qquad \text{b)}^{\text{HF}}\quad \overline{(x+3)+(y-1)i} = (2-5i)(1+i)$$

7. Számítsuk ki a z_1, z_2 komplex számok z_1/z_2 hányadosát, ha

$$\underset{\text{(B6.141)}}{\text{a)}}\quad z_1 = 3(\cos(45°)+i\sin(45°)),\ z_2 = 3-i\sqrt{3}, \qquad \underset{\text{(B6.139)}}{\text{a)}^{\text{HF}}}\quad \begin{cases} z_1 = 2\sqrt{2}(\cos(225°) + i\sin(225°)), \\ z_2 = 3(\cos(122°) + i\sin(122°)) \end{cases}$$

8. Számítsuk ki az alábbi z számok összes komplex n-edik gyökét!

$$\text{a)}\quad z = -1 + \sqrt{3}\,i, \quad n = 4, \qquad \text{b)}\quad z = -1, \quad n = 6 \qquad \underset{\text{(B6.160)}}{\text{c)}^{\text{HF}}}\quad z = -2 + 2i, \quad n = 3$$

9. (B6.84) A binomiális tétel alkalmazásával számítsuk ki $(-1+i)^7$ értékét és ellenőrizzük az eredményt trigonometrikus alakban elvégzett hatványozással!

10. A binomiális tétel alkalmazásával igazoljuk, hogy

$$\underset{\text{(B6.67)}}{\text{a)}}\quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \qquad \underset{\text{(B6.68)}}{\text{b)}^{\text{HF}}}\quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$