1. Számítsuk ki az alábbi komplex kifejezések értékét:
a) $\dfrac{2+i}{2-i}$ b) $\overline{(3+i)} \cdot \dfrac{5}{i}$ c) $(1+i)^3$ d) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^8$

2. Az $(1+i)^n$ binomiális tétel szerinti kifejtésével bizonyítsuk be, hogy 4-gyel osztható n számra $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = (-4)^{n/4}$.

3. Ábrázoljuk a $z_1 = 2+i$, $z_2 = 1-i$, $\overline{z}_1$, $z_1\overline{z}_1 i$, z_1+z_2, z_1-z_2 komplex számokat a síkon!

4. Adjuk meg a $(-2,1)$ középpontú, 4 sugarú kör komplex változós egyenletét!

5. Mi a mértani helye a komplex számsík azon z pontjainak, amelyekre
a) $1 < |z| < 3$ b) $|z-2| + |z+2| = 16$ c) $|z-i| = |z-2-i|$?

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, illetve egyenletrendszert ($x, y \in \mathbb{R}$, $z, u \in \mathbb{C}$)!
a) $\dfrac{(x+3)+(y-1)i}{1+i} = 2-5i$ b) $|z| + z = 2+i$ c) $\begin{array}{rcrcl} z & + & 2u & = & 1+i \\ 3z & + & iu & = & 2-3i \end{array}$

7. Adjuk meg
a) a $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ komplex szám trigonometrikus alakját;
b) a $\sin 24^\circ - i\cos 24^\circ$ szám trigonometrikus alakját;
c) az $u = 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ szám algebrai alakját.

8. Mivel kell a z komplex számot megszorozni, hogy az eredmény helyvektorát a z helyvektorának (origo körüli) $+120^\circ$-kal való elforgatásával, és a vektor 2-szeresére nagyításával kapjuk meg?

9. Számítsuk ki az alábbi műveletek eredményét trigonometrikus vagy algebrai alakban!
a) $\left(\dfrac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$ b) $\sqrt[3]{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ c) $\sqrt[3]{-27i}$ d) $\sqrt{-3-4i}$

10. Oldjuk meg a $z^4(2-3i) = -32+48i$ egyenletet!

11. Egy négyzet két csúcsát a $z_1 = 0$ és $z_2 = 3+4i$ komplex számok adják meg. Határozzuk meg a négyzet hiányzó csúcsait!

12. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^6 - z^3 + 1 = 0$ egyenletet! Ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon, és mutassuk meg, hogy mindegyik megoldás egységgyök, azaz valamelyik pozitív egész kitevős hatványuk 1.

Megoldások

1. a) $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)(2+i)}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

b) $(\overline{3+i}) \cdot \dfrac{5}{i} = (3-i)(-5i) = -5 - 15i$

c) $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$

d) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^8 = 2^4(1-i)^8 = 16 \cdot (-2i)^4 = 256.$

2. $(1+i)^n = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} i^m = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}(-1) + \binom{n}{3}(-i) + \binom{n}{4} + \binom{n}{5}i + \ldots$, és ennek a valós része $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$. Másrészt, ha $n = 4k$ alakú ($k \in \mathbb{Z}$), akkor $(1+i)^n = (1+i)^{4k} = (2i)^{2k} = (-4)^k$, amelynek valós része önmaga, így $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = (-4)^k$.

3. $z_1 = 2+i$ a $(2,1)$, $z_2 = 1-i$ az $(1,-1)$ koordinátájú pont. $\overline{z}_1$ a z_1 tükörképe az x tengelyre (a $(2,-1)$ koordinátájú pont), $z_1\overline{z}_1 i$ mint vektor a pozitív y tengely irányába mutat, és $|z_1|^2 = 5$ hosszú ($(0,5)$ koordinátájú), a $z_1+z_2 = 3$ és $z_1 - z_2 = 1+2i$ számok helyvektorait vektorösszeadással, illetve kivonással is megkaphatjuk a z_1 és z_2 helyvektorából.

4. $|z - (-2+i)| = 4$, azaz $|z + 2 - i| = 4$.

5. a) Origó középpontú körgyűrű, amelynek külső sugara 3, belső sugara 1, és a határvonalak nem tartoznak hozzá (azaz nyílt körgyűrű).

b) 2 és -2 fókuszpontú ellipszis, amelynek (vízszintes) nagytengelye 16 hosszú, vagyis az ellipszis a $(-8,0)$ és $(8,0)$ pontokban metszi az x tengelyt.

c) A komplex sík i és $2+i$ pontjait összekötő szakasz felező merőlegese (az $x = 1$ egyenletű egyenes).

6. a) $(x+3)+(y-1)i = (2-5i)(1+i) = 7-3i$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, tehát mindkét oldal algebrai alakban van, és az algebrai alak egyértelműsége miatt $x + 3 = 7$ és $y - 1 = -3$, azaz $x = 4$ és $y = -2$.

b) Legyen $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. A $|z| + z = 2 + i$ egyenletet átírva azt kapjuk, hogy $\sqrt{x^2+y^2} + x + yi = 2 + i$, amiből $\sqrt{x^2+y^2} + x = 2$, és $y = 1$. Az utóbbit az elsőbe behelyettesítve: $\sqrt{x^2+1} + x = 2$. Ebből $x^2 + 1 = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$, tehát $x = \frac{3}{4}$, és $z = \frac{3}{4} + i$ valóban megoldás.

c) Az első egyenlet háromszorosából kivonva a másodikat: $(6-i)u = 1 + 6i$, amiből $u = \frac{1+6i}{6-i} = i$, és $z = 1 + i - 2u = 1 - i$, és ez valóban jó megoldás.

7. a) $|z| = 2$, és $z = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

b) a $\sin 24° - i\cos 24° = -i(\cos 24° + i\sin 24°) =$
$(\cos 270° + i\sin 270°)(\cos 24° + i\sin 24°) = \cos 294° + i\sin 294°$.

c) az $u = 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 3(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

8. $2(\cos 120° + i\sin 120°)$-vel, azaz $-1 + \sqrt{3}i$-vel.

9. a) $\frac{4}{-1+i\sqrt{3}} = -1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$, és ennek a tizedik hatványa $2^{10}(\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3}) = 1024(\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -512 - 512\sqrt{3}i$.

b) $-\sqrt{2} - i\sqrt{6} = \sqrt{8}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \sqrt{8}(\cos 240° + i\sin 240°)$, és ennek a harmadik gyökei $\sqrt{2}(\cos(80° + k \cdot 120°) + i\sin(80° + k \cdot 120°))$, ahol $k = 0, 1, 2$, azaz

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt{2}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$$
$$z_3 = \sqrt{2}(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ).$$

c) $-27i = 27(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$, és ennek a harmadik gyökei: $3(\cos(90^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(90^\circ + k \cdot 120^\circ))$, azaz

$$z_1 = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 3i$$
$$z_2 = 3(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$
$$z_3 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Ezt úgy is megtalálhatjuk, hogy a könnyen látható $3i$ gyököt elforgatjuk 120 és 240 fokkal.

d) Mivel a $\sqrt{-3-4i}$ szögét csak közelítően tudnánk meghatározni (a szög koszinusza $-\frac{3}{5}$), viszont négyzetgyököt algebrai alakban is lehet számolni, inkább az utóbbi módszert választjuk. Ha a négyzetgyök $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -3 - 4i$, tehát $x^2 - y^2 = -3$ és $2xy = -4$. Az $y = \frac{-2}{x}$-et behelyettesítve az első egyenletbe x^2-re az $x^4 + 3x^2 - 4$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ebből $x^2 = -3$ vagy 1, de mivel x valós, csak $x^2 = 1$ és $x = \pm 1$ lehetséges, amiből $y = \mp 2$. Így $\sqrt{-3-4i} = \pm(1 - 2i)$.

10. $z^4 = \frac{-32+48i}{2-3i} = -16 = 16(\cos\pi + i \sin\pi)$. Ebből $z = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2})$, azaz

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$z_4 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

11. Ha a $z_1 = 0$ és $z_2 = 3 + 4i$ csúcsok szomszédosak, akkor a z_1-gyel szomszédos harmadik csúcsot, z_4-et a z_2-nek az z_1 (azaz az origó) körüli 90, illetve -90 fokos elforgatásával, azaz i-vel, illetve $-i$-vel való szorzással kapjuk, z_3 pedig $z_2 + z_4$: $z_4 = -4 + 3i$ és $z_3 = -1 + 7i$, illetve $z_4 = 4 - 3i$, és $z_3 = 7 + i$.

A harmadik esetben z_1 és z_2 a négyzet átlóját adják, és ebből a két oldalt a $z_1 = 0$ körüli $\pm 45^\circ$-os, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú forgatvanyújtással, azaz $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$-vel való szorzással kapjuk: ez a két csúcs: $(3 + 4i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ és $(3 + 4i)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$.

12. $z^3 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, tehát $z^3 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ vagy $z^3 = \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)$, és így $z_{1,2,3} = \cos(20^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(20^\circ + k \cdot 120^\circ)$, és $z_{4,5,6} = \cos(-20^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(-20^\circ + k \cdot 120^\circ)$. Ezek az egységkörön a 20°, 100°, 140°, 220°, 260°, -20° szögnél levő pontok. Mivel mindegyik szög 20° többszöröse, és a megoldások 1 abszolútértékűek, mindegyiknek a 18. hatványa 1. (Másképp: a $z^6 - z^3 + 1$ polinomnak többszöröse a $z^{18} - 1 = (z^9 - 1)(z^9 + 1) = (z^9 - 1)(z^3 + 1)(z^6 - z^3 + 1)$ polinom, így az első polinom gyökei gyökei a másodiknak is.)