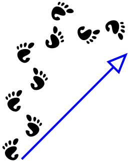
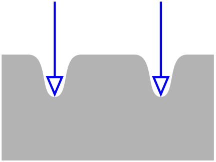
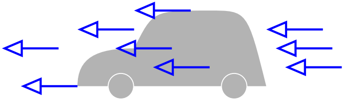
Vektorok

Wettl Ferenc

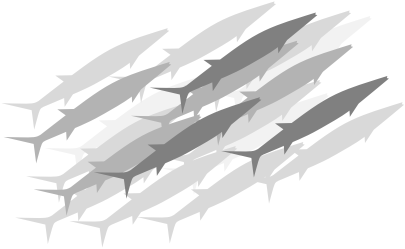
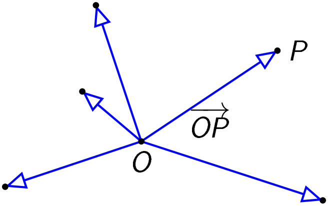
2014. október 20.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor

Kötött és szabad vektorok:

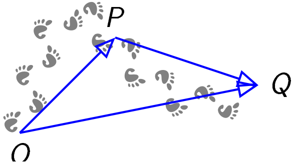




„Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

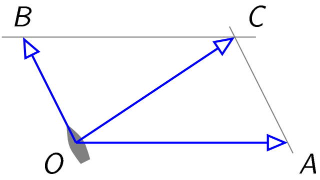



Vektorösszeadás, skalárral szorzás

Vektorösszeadás (háromszögmódszer, parallelogramma-módszer)

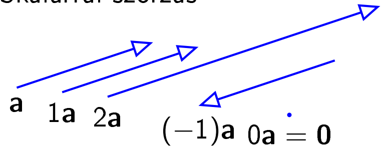


(a)



(b)

Skalárral szorzás



Műveleti tulajdonságok

Tétel (A vektorműveletek tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

c) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

d) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

e) $r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$

f) $r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

g) $(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$

h) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ és $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

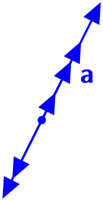
Lineáris kombináció

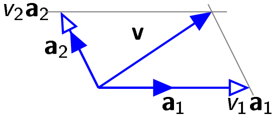
Definíció (Lineáris kombináció)

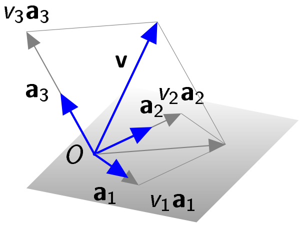
Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. A $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.







Lineáris függetlenség

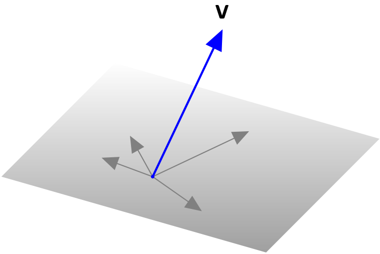
Definíció (Vektorok függetlensége)

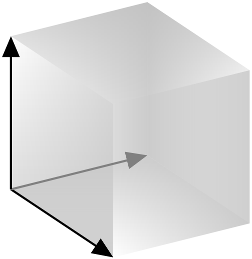
- Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ $(n \geq 1)$ vektoroktól,

  ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként.
- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ $(n \geq 2)$ vektorok lineárisan függetlenek,

  ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.
- Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük.
- Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

Lineáris függetlenség, egyértelmű lineáris kombináció





Tétel (Térbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Skaláris szorzás

Definíció (Két vektor skaláris szorzata)

Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

A skaláris szorzás tulajdonságai

Tétel (A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (kommutativitás)

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(r\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}>0$, ha $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, és $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$, ha $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Tétel (Mikor 0 a skaláris szorzat?)

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \iff \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges, ha bármelyikük a zérusvektor, vagy ha hajlásszögük $\pi/2$.)

Hosszúság és szög

Vektor hossza: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, azaz

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

Két pont (vektor) távolsága

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

Két vektor által bezárt szög:

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1}$$

mivel a $[0,\pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Három fontos összefüggés

Tétel (Pithagorász-tétel)

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra pontosan akkor teljesül az $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$összefüggés, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

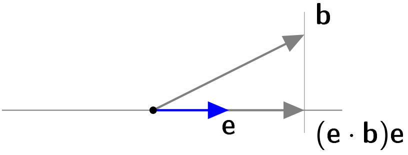
Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

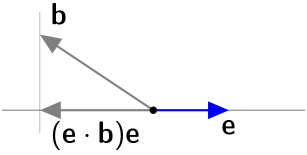
Bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Egységvektorral való szorzás

Tétel (Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése)

Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

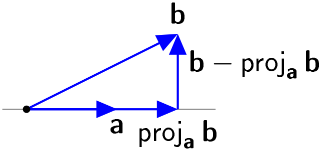




Merőleges vetítés

$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektora. Eszerint

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$



Tétel (Vektor felbontása merőleges összetevőkre)

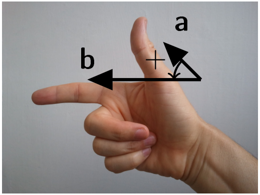
Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete

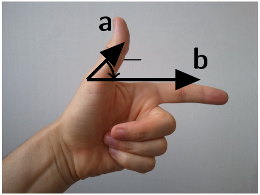
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

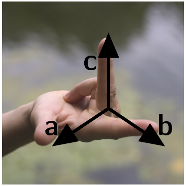
A $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére merőleges összetevője

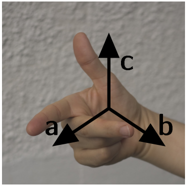
$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

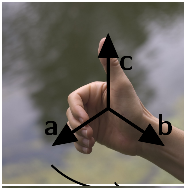
Orientáció

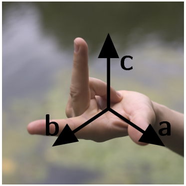


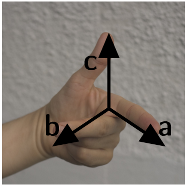


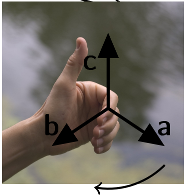












Vektori szorzás

Definíció (Vektori szorzat)

A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

- az abszolút érték nem negatív, mert sin a $[0, \pi]$-n nem negatív.
- Képletben: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$.

Vektori szorzás

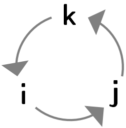
Példa ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektori szorzata)

Készítsünk műveletttáblát vektori szorzataikról!

Megoldás

Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0



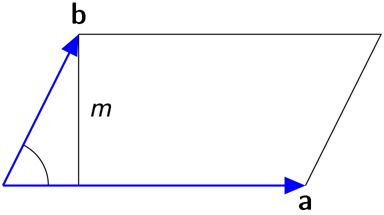
Vektori szorzás geometriai tulajdonságai

Tétel (Mikor $\mathbf{0}$ a vektori szorzat?)

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

Tétel (Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése)

Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területének mérőszámával egyenlő.



Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

Tétel (Vektori szorzás műveleti tulajdonságai)

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A vektori szorzás nem kommutatív (alternáló) és nem asszociatív. Pl.

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ de } \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Parallelepipedon térfogata

Példa (Parallelepipedon térfogata)

Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatát!

Megoldás

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített parallelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a parallelogramma síkjára. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektor:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a parallelepipedon magassága $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| .$$

Vegyes szorzat

A parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

Definíció (Vegyes szorzat)

A 3-dimenziós tér három tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorából képzett

$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

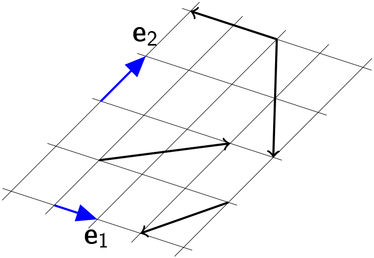
kifejezést a három vektor vegyes szorzatának nevezzük.

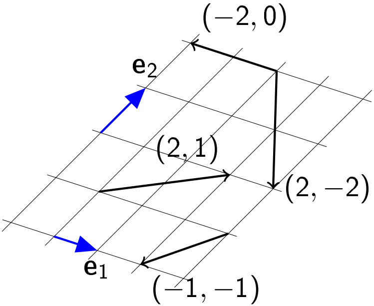
$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

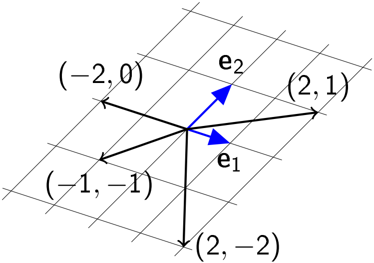
Vegyes szorzat geometriai jelentése

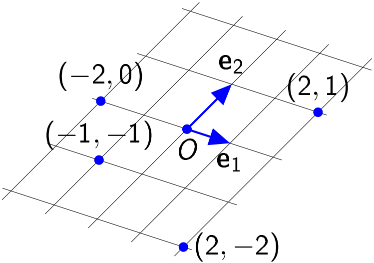
- A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelelpipedon előjeles térfogatának nevezzük.
- Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Tehát e skalár előjele a három vektor orientációját adja.
- A három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Vektorok és pontok koordinátái









Műveletek koordinátás alakban

Példa (Skaláris szorzás nem ortonormált koordinátarendszerben)

Alapvektorok: az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.

Megoldás

Az alapvektorok skaláris szorzatai:

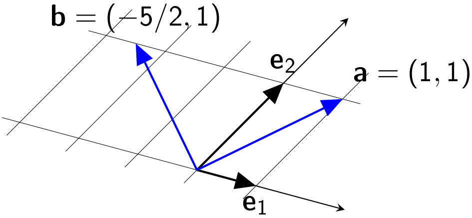
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

tehát a két vektor merőleges egymásra.

Műveletek koordinátás alakban



$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)\cdot(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)\\
&= u_1v_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\\
&= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.
\end{aligned}
$$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

D Egy bázis ortogonális, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra.

D Az egységvektorokból álló ortogonális bázist ortonormáltnak nevezzük.

T A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

B $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

Tétel (Vektori szorzat ortonormált koordinátarendszerben)

A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_2 b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3 b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1 b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1 b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2 b_1\mathbf{j} \times \\
&= a_2 b_3\mathbf{i} - a_3 b_2\mathbf{i} + a_3 b_1\mathbf{j} - a_1 b_3\mathbf{j} + a_1 b_2\mathbf{k} - a_2 b_1\mathbf{k} \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).
\end{aligned}$$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$a) \quad (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$b) \qquad \begin{aligned} &(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + \\ &\qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

Példa (Parallelogramma területe)

Az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad - bc|$.

Megoldás

$(a, b, 0)$ és $(c, d, 0)$ vektorok vektori szorzata

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.
Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak.

Jelölés: $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

Tétel (Paralelepipedon előjeles térfogata – vegyes szorzat)

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyes szorzata

$$\mathbf{abc} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Bizonyítás

$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, amit a koordinátás alakokból kiszámolhatunk:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) =$$
$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 .$$

Jelölés:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Műveletek derékszögű koordinátarendszerben

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & - & - & - \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & \\
 & & & + & + & +
\end{array}$$

Lineáris függetlenség

Tétel (Lineáris függetlenség)

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi három állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \ldots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

Tétel (A skaláris szorzás tulajdonságai)

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció (Abszolút érték, szög, merőlegesség, távolság)

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora.

- Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{2}$$
- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának nevezünk, a
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{3}$$

Amit hibátlanul tudni kell!

- D szabad vektor fogalma
- D két vektor összege (háromszög- és parallelogramma módszer), vektor skalárszorosa, vektorok lineáris kombinációja
- D vektorok skaláris szorzata
- Á mikor 0 a skaláris szorzat?
- Á egységvektorral való szorzás geometriai jelentése
- Á vektor abszolút értéke, és annak kiszámítása
- T Pithagorász-tétel, Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, Háromszög-egyenlőtlenség
- D orientáció, jobbrendszer, balrendszer
- D vektori szorzás
- Á mikor 0 a vektori szorzat?
- Á $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ geometriai jelentése: a parallelogramma területe

Amit hibátlanul tudni kell!

- D vegyes szorzat
- Á mikor 0 a vegyes szorzat?
- Á a vegyes szorzat geometriai jelentése: parallelepipedon előjeles térfogata
- T vektorok lineáris függetlensége és bármely lineáris kombinációjuk egyértelműsége
- T vektorok lineáris függetlensége és a nullvektor lineáris kombinációként való egyértelmű előállíthatósága
- D koordinátázás független vektorrendszerrel
- Á vektorműveletek kiszámítása koordinátás alakból