A matematika nyelvéről – bevezetés

Wettl Ferenc

2014-09-08

A matematikai kijelentések olyan mondatok, amelyekben

- matematikai objektumok (pl. szám, halmaz, függvény, osztható. . .)
- logikai konnektívumok (és, vagy, ha. . . akkor, minden, van olyan. . .)

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Esik az eső. E
- Nem esik. $\neg E$
- Esik az eső és süt a nap. $E \wedge F$ $(E \& F)$
- Nem esik vagy nem süt. $\neg E \vee \neg F$
- Ma moziba megyünk vagy fagyizuk. $M \vee F$
- Nem megyünk moziba és nem fagyizunk. $\neg M \wedge \neg F$
- Ha hétfőn nem futunk, (akkor) futunk kedden. $H \Rightarrow K$
- Hétfőn nem futunk de/és kedden sem. $H \wedge \neg K$
- Ha hétfőn futunk, futunk kedden is. $H \Rightarrow K$
- Hétfőn futunk de kedden nem. $H \wedge \neg K$

Definíció

Jelöljön P és Q két állítást. Igazságtáblájukkal a következő logikai műveleteket definiáljuk ($0 =$ hamis, $1 =$ igaz):

- tagadás, negáció ($\neg$, „nem”, `NOT`),
- és, konjunkció, logikai szorzás ($\wedge$, „és/de”, `AND`),
- (megengedő) vagy, diszjunkció, logikai összeadás ($\vee$, „vagy”, `OR`),
- kizáró vagy, moduláris (maradékos) összeadás ($\otimes$, „vagy. . . , vagy”, `XOR`),
- implikáció ($\Rightarrow$, „ha. . . , akkor. . .),
- ekvivalencia ($\Leftrightarrow$, „pontosan akkor”, „akkor és csak akkor”),

P	$\neg P$
0	1
1	0

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \otimes Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Definíció

Két logikai kifejezést azonosnak (azonosan egyenlőnek) tekintünk, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.

Ha nem futunk hétfőn, futunk kedden $\equiv$ Hétfőn vagy kedden futunk.

Példa (Az implikáció ekvivalens alakja)

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Megoldás

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Nem igaz, hogy ha nem futunk hétfőn, futunk kedden $\equiv$
Se hétfőn se kedden nem futunk.

Példa (Az implikáció tagadása)

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

Megoldás

$\neg$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\equiv$	A	$\wedge$	$\neg$	B
0	0	1	0	✓	0	0	1	0
0	0	1	1	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	1	0	0	1

Definíció

Az $A \Rightarrow B$ implikáció megfordításán az $B \Rightarrow A$ implikációt értjük.

Példa

Ha Béla orvoshoz megy, tiszta fehérneműt húz.
Ha Béla tiszta fehérneműt húz, orvoshoz megy.

Példa

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B$.

Megoldás

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\Rightarrow$	$A)$	$\equiv$	A	$\Leftrightarrow$	B
0	1	0	1	0	1	0	✓	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	✓	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	✓	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	✓	1	1	1

- Ha n osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.
  ha A, akkor B $\equiv$
  A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele B igazságának $\equiv$
  B igazságának A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele
- Csak akkor osztható n 4-gyel, ha 2-vel is.
  csak akkor A, ha B $\equiv$
  B igazsága A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele $\equiv$
  A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele B igazsága
- Matematikai szövegekben a fenti két mondatszerkezet ekvivalens:
  A elegendő feltétele B-nek, és B szükséges feltétele A-nak.
  Nem matematikai példa: csak akkor kapsz diplomát, ha befizeted a tandíjat!
- A szükséges és elegendő feltétele B-nek, azaz $A \Leftrightarrow B$ $\equiv$
  csak akkor B, ha A (mert szükséges, azaz $B \Rightarrow A$), és ha A, akkor B (mert elégséges, azaz $A \Rightarrow B$). $\equiv$
  Akkor és csak akkor A, ha B

Példa

Mutassuk meg, hogy ha m és n olyan pozitív egészek, hogy $m + n \geq 49$, akkor $m \geq 25$ vagy $n \geq 25$.

Példa (Kontrapozíció)

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Megoldás

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Példa (de Morgan azonosságok)

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Megoldás

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Jelölés

A $\forall x P(x)$ és a $\exists x P(x)$ jelölések jelentése: „minden x-re (igaz, hogy) $P(x)$" és „van olyan x, hogy $P(x)$". A $\forall$ ill. a $\exists$ jel neve univerzális ill. egzisztenciális kvantor.

$\forall$: „minden", „tetszőleges", „bármely", „akármelyik", „bármikor". . .
$\exists$: „van", „van olyan", „létezik", „található olyan", „megesik". . .

Példa

Jelölje $P(x)$, hogy x prím, $S(x)$, hogy x páros és $O(x, y)$, hogy x osztója y-nak. Formalizáljuk az alábbi állításokat, és döntsük el, hogy igazak-e!

• Létezik páros prím.	$\exists x[S(x) \wedge P(x)]$	igaz
• Minden prím páratlan.	$\forall x[P(x) \Rightarrow \neg S(x)]$	hamis
• Ha x és y osztója z-nek, akkor xy is.	$\forall x, y, z[O(x, z) \wedge O(y, z) \Rightarrow O(xy, z)]$	hamis

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Mindenki szereti Júliát. $\forall x \in J\,[S(x)]$
  - Van aki nem szereti. $\exists x \in J\,[\neg S(x)]$
- Valaki járt itt. $\exists x \in E\,[I(x)]$
  - Senki sem járt itt. $\forall x \in E\,[\neg I(x)]$
- Minden ajtón van kilincs. $\forall a \in A\, \exists k \in K\,[R(a, k)]$
  - Van olyan ajtó, amin nincs kilincs. $\exists a \in A\, \forall k \in K\,[\neg R(a, k)]$

Kvantoros állítások tagadása: $\forall\forall\exists \ldots A$ tagadása $\exists\exists\forall \ldots \neg A$.

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük. Jele: $\emptyset$. Az „x dolog eleme az X halmaznak” jelölése: $x \in X$.
Az A halmazt a B halmaz részhalmazának nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. A valódi része B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.
Halmazokról mindig csak mint egy adott alaphalmaz részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Jelölés

$\mathbb{R}$: valósok, $\mathbb{N}$: természetes számok, $\mathbb{Z}$: egészek, $\mathbb{Q}$: racionálisok, $\mathbb{N}^+$: pozitív egészek, $\mathbb{R}^+$: pozitív valós számok.
A H halmaz azon x elemeinek halmazát, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek a következőképp adjuk meg:

$$\{\, x \in H : P(x) \,\}.$$

Definíció (Halmazműveletek)

Legyen A és B egy H halmaz két részhalmaza. Az A és B halmaz $A \cap B$ metszetén (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak:

$$A \cap B = \{\, x \in H : x \in A \wedge x \in B \,\}.$$

$A \cup B$ egyesítettjén (unióján) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak:

$$A \cup B = \{\, x \in H : x \in A \vee x \in B \,\}.$$

Definíció (Halmazműveletek (folytatás))

Az A és B halmaz $A \setminus B$ $(A - B)$ különbségén az A összes olyan elemének halmazát értjük, amelyek nincsenek benne B-ben.

$$A \setminus B = \{\, x \in H : x \in A \wedge x \notin B \,\}.$$

Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerén a $H \setminus A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}_H$. Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert egyszerűen $\overline{A}$ jelöli.

$$\overline{A}_H = \{\, x \in H : x \notin A \,\}.$$

Definíció (Halmazok számossága)

Két halmaz azonos számosságú, ha elemeik közt létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

A, B,... végtelenemeletes szállók, emeletenként egy egyágyas szoba.

- ```
  A:  1  2  3  4  5  6  7 ...
  A:  3  4  5  6  7  8  9...
  B:  1  2
  ```
- ```
  A:  1  2  3  4  5  6  7 ...
  A:  2  4  6  8 10 12 ...
  B:  1  3  5  7  9 11 ...
  ```
- ```
  A:  1  2  3  4  5  6  7 ...
  A:  1  2  6  7 15 16 28 ...
  B:  3  5  8 14 17 27 ...
  C:  4  9 13 18 26 ...
  D: 10 12 19 25 ...
  E: 11 20 24 ...
  F: ⋮
  ```
  ```

Definíció (Megszámlálhatóan végtelen halmaz)

Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú az $\mathbb{N}$ halmazzal.

Tétel

Az egész számok és a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen.

Tétel

A valós számok (és az irracionális számok) halmaza nem megszámlálható (számosságukat kontinuumnak nevezzük).

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

```
1     0,361051376931077603 4...
2     3,115923654328234501 4...
3     0,158502672382365432 8...
4     2,674823134582234501 4...
5     7,574870000000000000 0...
6    -0,654872765023457680 0...
7    -5,268762317657765323 4...
8     0,987024480763333377 7...
9     0,111355432234600021 4...
⋮
0,523315111
```

Amit hibátlanul tudni kell!

1. logikai műveletek műveleti tábláinak ismerete,
2. alapazonosságok igazolása igazságtáblával: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ (implikáció tagadása), $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontrapozíció), $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan).
3. logikai műveleteket és/vagy kvantorokat tartalmazó állítások tagadása,
4. halmazműveletek definíciói,
5. a természetes számok, a racionális, az irracionális és a valós számok számossága.