Komplex számok

Wettl Ferenc

2014. szeptember 14.

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\rightarrow$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\rightarrow$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\rightarrow$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\rightarrow$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\rightarrow$ valós számok
- és mi van az $x^2 = -1$ egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis" című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétel Nave, Fiore)
- Niccolò Fontana (1500?–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldásának módjára

- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás igérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatásának" történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

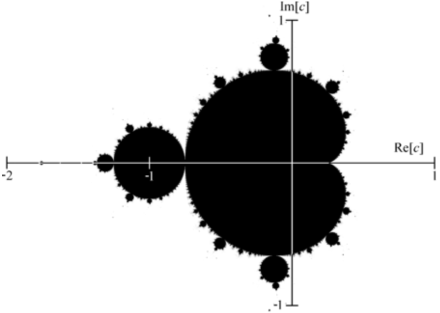
Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!
A Tartaglia által talált képlet:

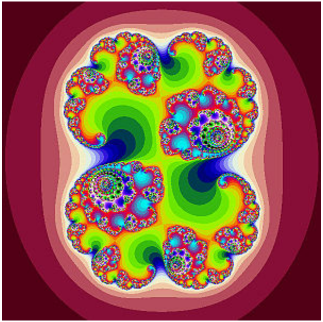
$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

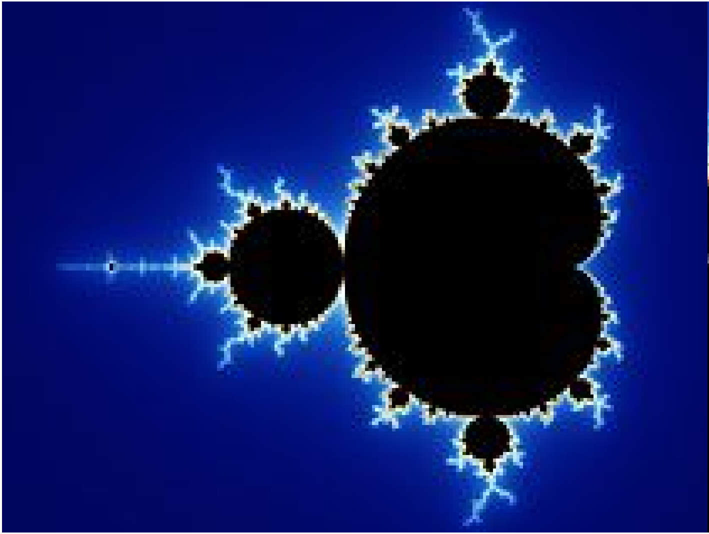
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3}\left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3}\left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

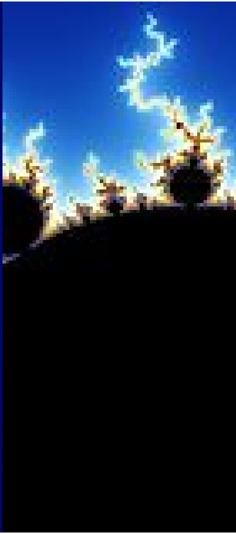
- hidrodinamika, áramlások vizsgálata, Zsukov-féle szárnyprofil
- elektromosságtan, jelfeldolgozás, villamosmérnöki tudományok
- lineáris rendszerek, lineáris differenciálegyenletek megoldása
- relativitáselmélet, kvantummechanika
- fraktálok (Mandelbrot- és Julia-halmazok)





Mandelbrot halmaz





Jelölés

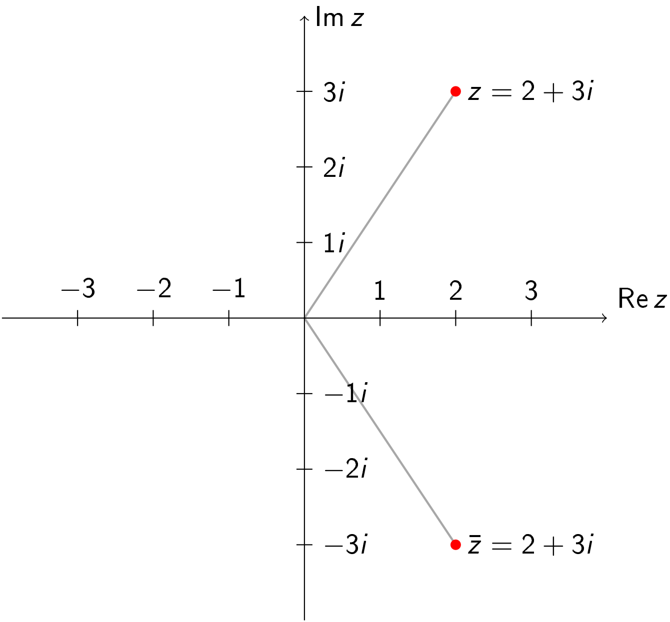
$i = \sqrt{-1}$ imaginárius egység (imaginárius = nem valódi)

Definíció (komplex szám algebrai alakja)

Az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $i^2 = -1$. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.
Egy komplex szám több alakba is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (más szokásos jelölés: $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$).

Definíció (konjugált)

$\bar{z} = a - ib$, ahol $z = a + ib$

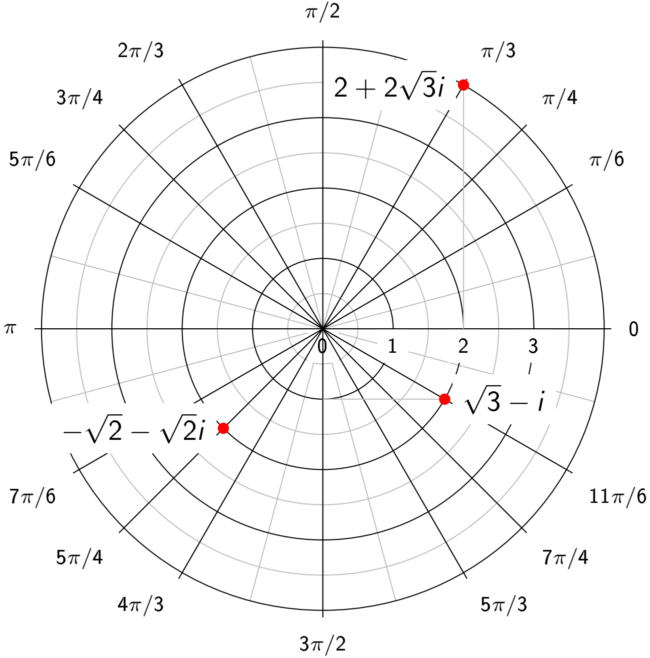

Im z
$3i$
$2i$
$1i$
$-1i$
$-2i$
$-3i$
-3
-2
-1
1
2
3
Re z
$z = 2 + 3i$
$\bar{z} = 2 + 3i$

Definíció

Az (a, b) vektor x-tengellyel bezárt szöge legyen φ, hossza r. Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban is, hisz $a = r\cos\varphi$, és $b = r\sin\varphi$. Ezt az alakot trigonometriai alaknak, az r nemnegatív valóst a komplex szám abszolút értékének, φ-t argumentumának nevezzük: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Tétel

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$, azaz
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$


$\pi/2$
$2\pi/3$
$\pi/3$
$3\pi/4$
$\pi/4$
$5\pi/6$
$\pi/6$
π
0
$7\pi/6$
$11\pi/6$
$5\pi/4$
$7\pi/4$
$4\pi/3$
$5\pi/3$
$3\pi/2$
0
1
2
3
$2+2\sqrt{3}i$
$\sqrt{3}-i$
$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Példa

$(2+3i)-(3-i) = -1+4i$

$(2+3i)(3-i) = 2\cdot 3 + 3i(-i) + (3i)\cdot 3 + 2\cdot(-i) = 9+7i$

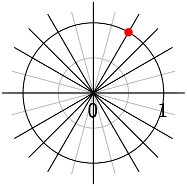
$\frac{1}{i} = -i$

$\frac{2+3i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$

Példa

$[2(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})][\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}] =$
$2cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + 2[cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{6}]i =$
$2\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})i = 2\cos\frac{3\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2i.$

Ellenőrzés: $(1+\sqrt{3}i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 - \frac{i}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2i.$



Példa

Számítsuk ki

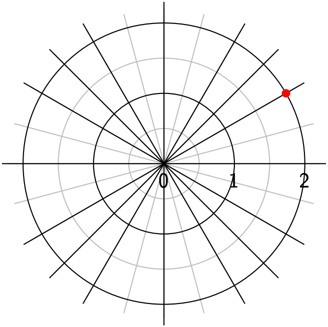
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$$

értékét!

Megoldás

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ trigonometriai alakja: $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

$[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}]^{100}=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$



Példa

Számítsuk ki

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^9$$

értékét!

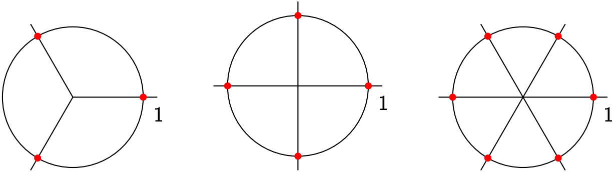
Megoldás

$\sqrt{3}+i$ hossza $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, trigonometriai alakja: $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.
$[2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})]^9=2^9(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})=512(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=-512i$

Definíció

Az 1 n-edik gyökeit n-edik *egységgyököknek* nevezzük.

Az 1 négyzetgyökei a komplexek körében: 1 és -1.
Az 1 harmadik gyökei: $1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Az 1 negyedik gyökei: $1,\ i,\ -1,\ -i$.
Az 1 hatodik gyökei: $1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Példa

Számítsuk ki a hatodik egységgyököket!

Megoldás

Az 1 trigonometriai alakja $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Olyan számokat keresünk, melyek 6-odik hatványa 1, azaz olyanokat, melyekre $r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Innen $r = 1$, és $6\varphi = 0$, de mivel 0 ugyanaz a szög, mint 2π, $4\pi \ldots$, ezért $6\varphi = 2\pi$, $6\varphi = 4\pi$, $6\varphi = 6\pi$, $6\varphi = 8\pi$, $6\varphi = 10\pi$ is lehet! Innen $\varphi = 0, {}^{\pi}/_{3}, {}^{2\pi}/_{3}, \pi, {}^{4\pi}/_{3}, {}^{5\pi}/_{3}$. A gyökök tehát:

$1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$,

$1(\cos {}^{\pi}/_{3} + i \sin {}^{\pi}/_{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos {}^{2\pi}/_{3} + i \sin {}^{2\pi}/_{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$,

$1(\cos {}^{4\pi}/_{3} + i \sin {}^{4\pi}/_{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$1(\cos {}^{5\pi}/_{3} + i \sin {}^{5\pi}/_{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
  $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
- algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2 = -1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.
  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$,
  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$,
  $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$,
- trigonometriai alakban:
  $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
  $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Tétel (Konjugált tulajdonságai)

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Tétel (Abszolút érték tulajdonságai)

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak van komplex gyöke.

Tétel (Algebra alaptétele – változat)

Minden komplex-együtthatós n-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak pontosan n gyöke van, ha a gyököket multiplicitással számoljuk. Másként fogalmazva minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható. Nevezetesen az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Definíció (Binomiális együttható)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tétel (Binomiális tétel)

Tetszőleges valós vagy komplex a és b számokra

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Példa

$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

Pascal-háromszög

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Amit hibátlanul tudni kell!

1. algebrai vagy trigonometriai alakban megadott komplex számok ábrázolása a komplex síkon
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ többszörös szögek esetén konverzió a két alak közt
3. algebrai alakban megadott komplex számok összeadása, kivonása, szorzása, osztása
4. trigonometriai alakban megadott komplex számok szorzása, osztása, hatványozása
5. második, harmadik, negyedik, hatodik egységgyökök fölírása
6. komplex szám abszolút értékének, konjugáltjának fölírása, az abszolút érték és a konjugált tulajdonságai
7. Pascal-háromszög első néhány sorának fölírása, a binomiális együtthatók kiszámolása, binomiális-tétel fölírása általános és konkrét $(n = 2, 3, 4, 5, 6)$ esetén
8. az algebra alaptétele a komplex gyökök számáról