

# Határérték

## A „Thomas féle Kalkulus 1” című könyvet használó hallgatóknak

Összeállította: Wetzl Ferenc

2014. október 5.

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

- 1 **Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma**
  - **Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség**
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 **A határérték precíz definíciója és kiszámítása**
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 **Kiterjesztések**
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 **Összefoglalás**

## Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

### Megoldás

Galileo Galilei (1564–1642) **szabadesés törvénye**:  $t$  idő alatt megtett út  $y$

$$y = 4,9t^2$$

**Átlagsebesség**: a megtett  $\Delta y$  távolság elosztva a megtételéhez szükséges  $\Delta t$  nagyságú időtartammal.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot 2^2 - 4,9 \cdot 1^2}{2 - 1} = 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő **pillanatnyi sebességét** a  $t = 1\text{s}$  és a  $t = 2\text{s}$  pillanatban.

## Megoldás

A kő átlagsebességét egy  $\Delta t$  hosszúságú  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  időintervallumban:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4,9 \cdot (t_0)^2}{\Delta t}$$

$\Delta t$	Átlagsebesség $[1, 1 + \Delta t]$ -ben	Átlagsebesség $[2, 2 + \Delta t]$ -ben
1	14,7	24,5
0,01	9,849	19,649
0,0001	9,8000	19,6000

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9(t_0 + \Delta t)^2 - 4,9(t_0)^2}{\Delta t} = \frac{9,8t_0\Delta t + 4,9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9,8t_0 + 4,9\Delta t.$$

A pillanatnyi sebességek  $t_0 = 1\text{s}$  esetén  $9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $t_0 = 2\text{s}$  esetén  $19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- 1 **Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma**
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 **A határérték precíz definíciója és kiszámítása**
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 **Kiterjesztések**
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 **Összefoglalás**

## Definíció (Átlagos változási sebesség egy intervallumon)

Az  $y = f(x)$  függvény **átlagos változási sebessége** az  $[x_1, x_2]$  intervallumon:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h = \Delta x \neq 0$$



- 1 **Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma**
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 **A határérték precíz definíciója és kiszámítása**
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 **Kiterjesztések**
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 **Összefoglalás**

Tegyük fel, hogy az  $f(x)$  függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek  $x_0$  eleme, *kivéve esetleg magát az  $x_0$  helyet*. Ha az  $f(x)$  függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az  $L$  számhoz, amennyiben az  $x$  értékek eléggé megközelítik  $x_0$ -t, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  az  $L$  számhoz tart miközben  $x$  tart  $x_0$ -hoz; ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy  $f$  **határértéke** az  $x_0$  pontban  $L$ . Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ vagy } \lim_{x_0} f = L$$

## Példa (Határérték és függvényérték)

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az  $x = 1$  pont környezetében.

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

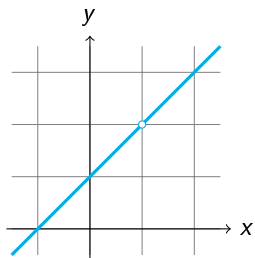
$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$(c) h(x) = x + 1$$

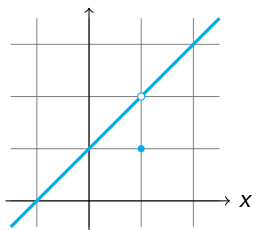
## Megoldás

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 = h(1)$ .  $g(1) = 1 \neq 2$ ,  $f$  pedig nincs is értelmezve 1-ben.

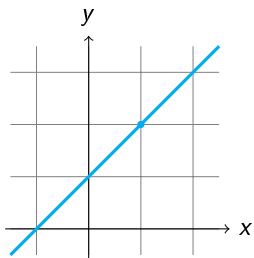
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



$$f(x) = x + 1$$



## Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

- (a) Ha  $f$  az **identikus leképezés**, azaz minden  $x$ -re  $f(x) = x$ , akkor tetszőleges  $x_0$  esetén

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

- (b) Ha  $f$  konstans függvény, azaz minden  $x$ -re  $f(x) = k$  valamely  $k$  számra, akkor tetszőleges  $x_0$  esetén

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k.$$

Például

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -7} (4) = \lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4.$$

## Példa (Amikor nem létezik határérték)

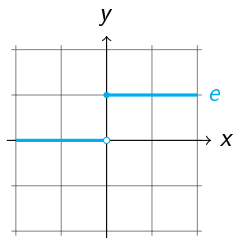
Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor  $x \rightarrow 0$ ?

$$(a) e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{ez az egységugrás függvény})$$

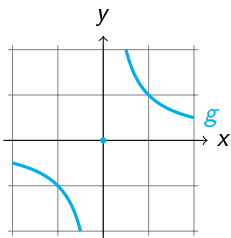
$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

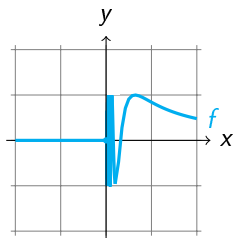
$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás



## Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

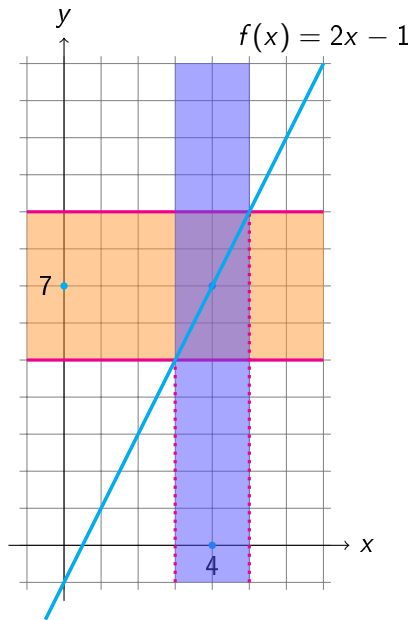
Legyen  $y = 2x - 1$ ,  $x_0 = 4$ . Milyen közel legyenek  $x$  értékei 4-hez, hogy az  $y = 2x - 1$  értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

## Megoldás

$x$  milyen értékei esetén teljesül az  $|y - 7| < 2$  egyenlőtlenség? Mivel  $|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$ , ezért

$$\begin{aligned}
 |2x - 8| &< 2 \\
 -2 &< 2x - 8 < 2 \\
 6 &< 2x < 10 \\
 3 &< x < 5 \\
 -1 &< x - 4 < 1 \\
 |x - 4| &< 1
 \end{aligned}$$

Ha  $x$  és  $x_0 = 4$  eltérése kisebb, mint 1, akkor  $y$  és  $y_0 = 7$  eltérése kisebb, mint 2.



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

## Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény értelmezve van valamely, az  $x_0$ -t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg  $x_0$  kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy  $f(x)$  tart  $L$ -hez, amint  $x$  tart  $x_0$ -hoz ( $f$  határértéke az  $x_0$  helyen  $L$ ), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden  $x$  esetén, ha  $0 < |x - x_0| < \delta$ , akkor  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

## Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges  $x_0$  esetén (a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , és (b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$  (ahol  $k$  állandó).

### Megoldás

(a) Rögzítsünk egy  $\varepsilon > 0$  számot. Találnunk kell egy  $\delta > 0$  számot, amelyre teljesül, hogy  $0 < |x - x_0| < \delta$  fennállásából  $|x - x_0| < \varepsilon$  következik. Ez teljesül, ha  $\delta \leq \varepsilon$ . Ez azt jelenti, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .

(b) Legyen adott egy  $\varepsilon > 0$  szám. Olyan  $\delta$ -t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy  $0 < |x - x_0| < \delta$  fennállásából  $|k - k| < \varepsilon$  következik. Mivel azonban  $k - k = 0$ , a szóban forgó implikáció bármely pozitív  $\delta$  esetén igaz. Eszerint tehát  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ .

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

Megjegyzés (Hogyan keressük meg az  $f$ ,  $L$ ,  $x_0$  és  $\varepsilon > 0$  négyesnek megfelelő  $\delta$ -t?)

Azt a  $\delta$ -t, amelyre tetszőleges  $x$  esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- (1) Az  $|f(x) - L| < \varepsilon$  egyenlőtlenség megoldásával keressünk egy  $(a, b)$  nyílt intervallumot, amelynek minden  $x_0$ -tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.
- (2) Adjunk meg egy  $\delta > 0$  számot, amelyre teljesül, hogy az  $x_0$  középpontú  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  nyílt intervallum az  $(a, b)$  intervallum belsejébe esik.



## Példa

Igazoljuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ , amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

## Megoldás

Bizonyítandó: bármely  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $\delta > 0$ , hogy minden  $x$ -re

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$$

## Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden  $x_0$ -tól különböző elemére teljesül az  $|f(x) - 4| < \varepsilon$  egyenlőtlenség.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x^2 - 4 < \varepsilon \\ 4 - \varepsilon &< x^2 < 4 + \varepsilon \\ \sqrt{4 - \varepsilon} &< |x| < \sqrt{4 + \varepsilon} \\ \sqrt{4 - \varepsilon} &< x < \sqrt{4 + \varepsilon} \end{aligned}$$

(Gyökvonásnál feltettük, hogy  $\varepsilon < 4$ .) Tehát ha  $x \in (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$  és  $x \neq 2$ , akkor  $|f(x) - 4| < \varepsilon$ .

(2) Adjunk meg egy  $\delta > 0$  számot, melyre  $(2 - \delta, 2 + \delta) \subseteq (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$ .

$$\delta = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\}.$$



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

## Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek  $L$ ,  $M$ ,  $c$  és  $k$  valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

- (1) **Összeg, különbség:**  $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$ ,
- (2) **Szorzat:**  $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$ ,
- (3) **Konstanssal való szorzás:**  $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L$ ,
- (4) **Hányados:**  $\lim_c \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$  (amennyiben  $M \neq 0$ ),
- (5) **Racionális kitevőjű hatványozás:** Ha  $r$  és  $s$  relatív prím egész számok, továbbá  $s \neq 0$ , akkor  $\lim_c f^{r/s} = L^{r/s}$ , feltéve, hogy  $L^{r/s}$  valós szám (ha  $s$  páros, akkor feltesszük, hogy  $L > 0$ ).

## Példa

Igazoljuk, hogy ha  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  és  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ , akkor

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

## Megoldás

Legyen adva az  $\varepsilon > 0$  szám. Meg kell adnunk egy pozitív  $\delta$ -t, amelyre teljesül, hogy minden  $x$  esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

## Megoldás (folytatás)

A megadott  $\varepsilon$ -hoz létezik olyan  $\delta_1 > 0$  és  $\delta_2 > 0$ , hogy minden  $x$ -re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , akkor  $0 < |x - c| < \delta$ , és így  $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ , és  $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ . Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban:  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$ .

## Tétel

Ha  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , akkor

$$\lim_c P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

## Tétel

Ha  $P$  és  $Q$  polinomfüggvények és  $Q(c) \neq 0$ , akkor

$$\lim_c \frac{P}{Q} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

## Tétel (Szandvicstétel)

Ha a  $c$  pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg  $c$  kivételével) minden  $x$  elemére teljesül, hogy  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll  $\lim_c f = L$  is.

## Tétel

Ha a  $c$  pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg  $c$  kivételével) minden  $x$  elemére  $f(x) \leq g(x)$ , és léteznek a  $\lim_c f$  és  $\lim_c g$  határértékek, akkor

$$\lim_c f \leq \lim_c g.$$

## Példa (A szendvicstétel alkalmazása)

Ha

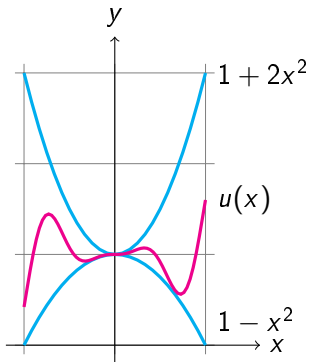
$$1 - x^2 \leq u(x) \leq 1 + 2x^2,$$

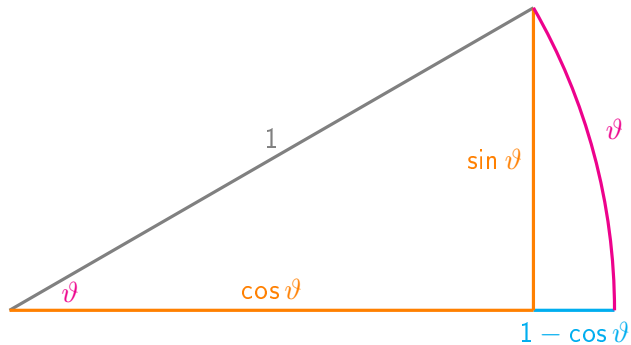
mit mondhatunk a  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$  határértékről?

## Megoldás

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2) = 1, \text{ így}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$





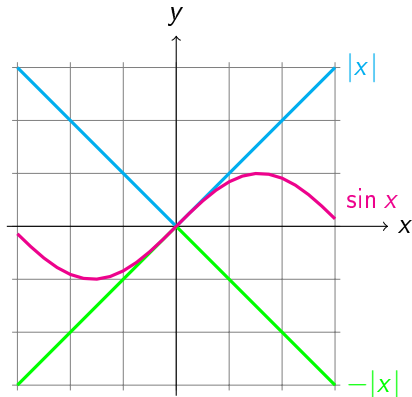
$$|\sin \vartheta| \leq |\vartheta|$$

$$0 \leq 1 - \cos \vartheta \leq |\vartheta|$$

## Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

$-|\vartheta| \leq \sin \vartheta \leq |\vartheta|$ , és  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (-|\vartheta|) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} (|\vartheta|) = 0$ , ezért

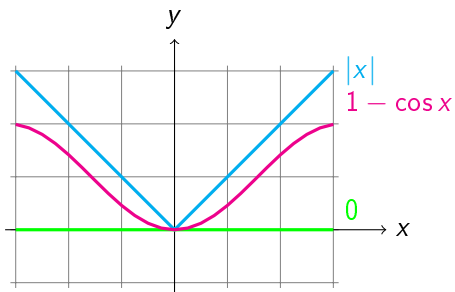
$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sin \vartheta = 0.$$



## Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

$0 \leq 1 - \cos \vartheta \leq |\vartheta|$ , így

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (1 - \cos \vartheta) = 0, \text{ azaz } \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \cos \vartheta = 1$$



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás



## Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az  $f$  függvény **jobb oldali határértéke** az  $x_0$  helyen az  $L$  szám (jelölése:

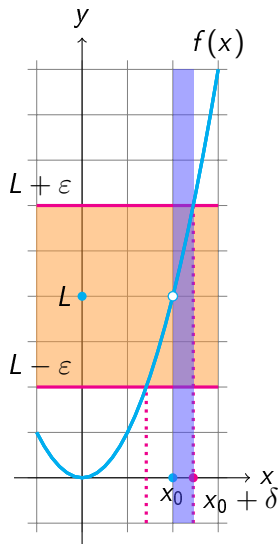
$$\lim_{x_0^+} f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = L), \text{ ha}$$

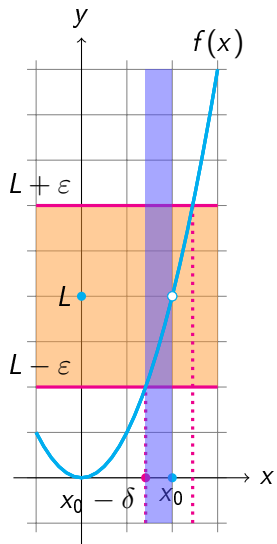
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Az  $f$  függvény **bal oldali határértéke** az  $x_0$  helyen az  $L$  szám (jelölése:

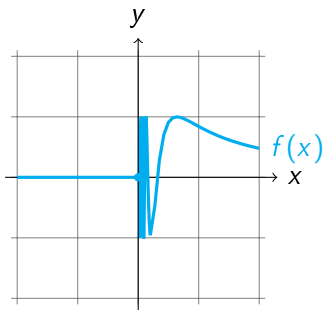
$$\lim_{x_0^-} f = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L), \text{ ha}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$





$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



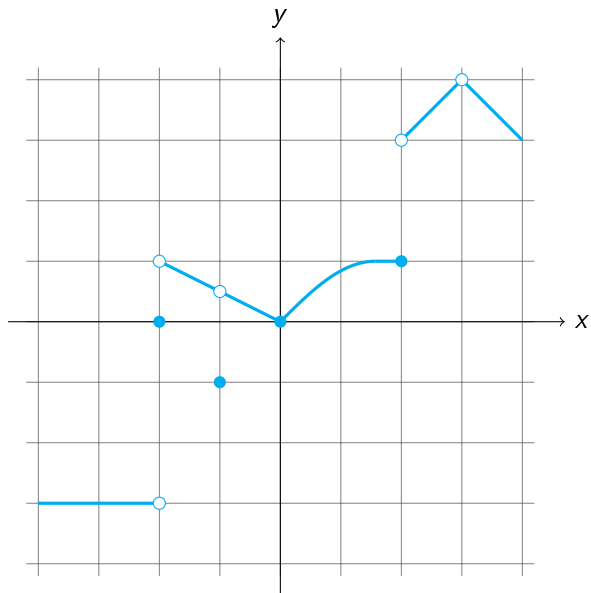
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{NEM LÉTEZIK}$$

## Tétel (Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata)

$f$ -nek pontosan akkor létezik a  $c$  helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlők:

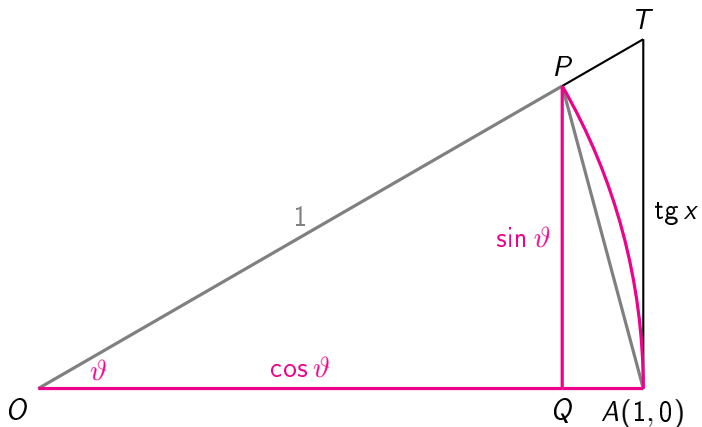
$$\lim_c f = L \Leftrightarrow \lim_{c^+} f = L \text{ és } \lim_{c^-} f = L.$$



Tétel (A  $\sin(\vartheta)/\vartheta$  függvény határértéke)

Ha a  $\vartheta$  szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1. \quad (1)$$



$OAP \triangle$  területe  $<$   $OAP$  körcikk területe  $<$   $OAT \triangle$  területe.



## Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték  $1 \rightsquigarrow$  kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 ( $0 < \vartheta < \pi/2$ ):

$OAP \triangle$  területe  $<$   $OAP$  körcikk területe  $<$   $OAT \triangle$  területe.

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sin \vartheta$$

$$T_{OAP \text{ körcikk}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ív hossz} \cdot \text{sugár} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \vartheta = \frac{\vartheta}{2}$$

$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \text{tg} \vartheta$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \sin \vartheta < \frac{1}{2} \vartheta < \frac{1}{2} \text{tg} \vartheta$$

$\frac{1}{2} \sin \vartheta$ -val osztva ( $\sin \vartheta > 0$ ):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} < \frac{1}{\cos \vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos \vartheta}{1}$$

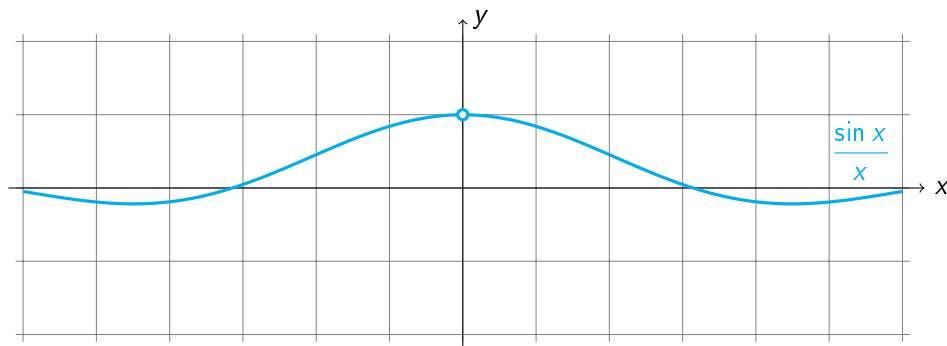
a szandvicstétel alapján

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1$$

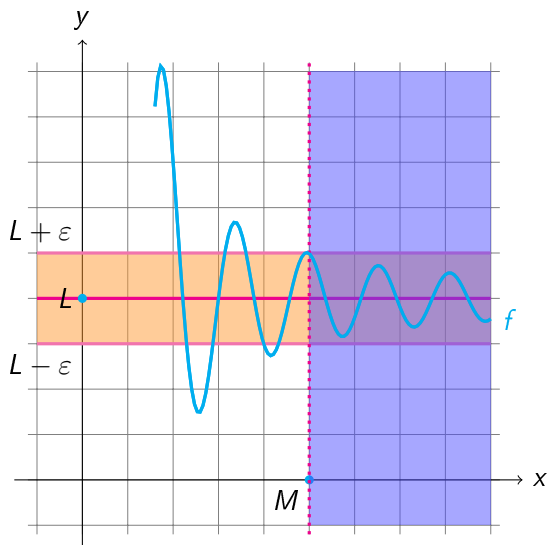
2.  $\sin \vartheta$  és  $\vartheta$  páratlan függvények  $\rightarrow (\sin \vartheta)/\vartheta$  páros  $\rightarrow$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1,$$

így  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1$ .



- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás



## Definíció (Határérték a végtelenben)

1. Az  $f$  függvény **határértéke a végtelenben**  $L$  ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  vagy  $\lim_{\infty} f = L$ ), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

2. Az  $f$  függvény **határértéke a mínusz végtelenben**  $L$  ( $\lim_{-\infty} f = L$ ), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x [x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

## Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek  $L$ ,  $M$  és  $k$  valós számok. Tegyük fel, hogy

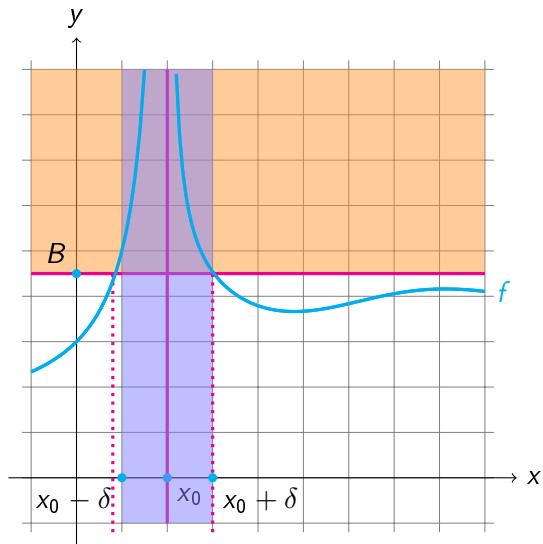
$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

- (1) **Összeg, különbség:**  $\lim_{\pm\infty} (f \pm g) = L \pm M$ ,
- (2) **Szorzat:**  $\lim_{\pm\infty} (fg) = LM$ ,
- (3) **Konstanssal való szorzás:**  $\lim_{\pm\infty} (kf) = kL$ ,
- (4) **Hányados:**  $\lim_{\pm\infty} \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$  (amennyiben  $M \neq 0$ ),
- (5) **Racionális kitevőjű hatványozás:** Ha  $r$  és  $s$  relatív prím egész számok, továbbá  $s \neq 0$ , akkor  $\lim_{\pm\infty} f^{r/s} = L^{r/s}$ , feltéve, hogy  $L^{r/s}$  valós szám (ha  $s$  páros, akkor feltesszük, hogy  $L > 0$ ).

- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás





## Definíció (Végtelen határértékek)

1. Az  $f$  határértéke az  $x_0$  helyen végtelen ( $\infty$ ), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az  $f$  határértéke az  $x_0$  helyen mínusz végtelen ( $-\infty$ ), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = -\infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < B]$$

## Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

## Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B]$$

$\frac{1}{x^2} > B$  pontosan akkor, ha  $x^2 < \frac{1}{B}$ , azaz ha  $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$ . Legyen  $\delta \leq 1/\sqrt{B}$ , akkor minden  $x$ -re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B,$$

azaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

## Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az  $f$  függvény határértéke a végtelenben végtelen ( $\infty$ ), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az  $f$  függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ( $-\infty$ ), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = -\infty,$$

ha

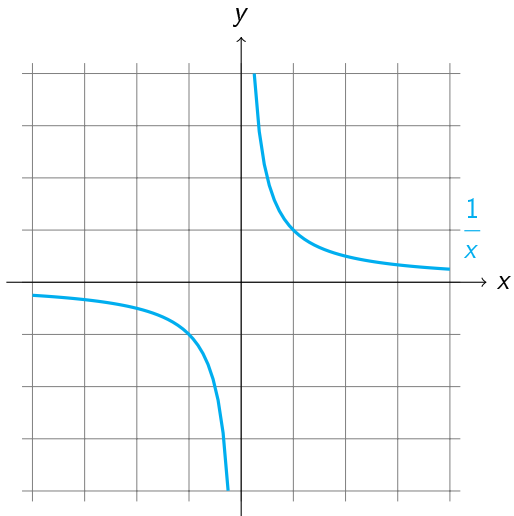
$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) < B].$$

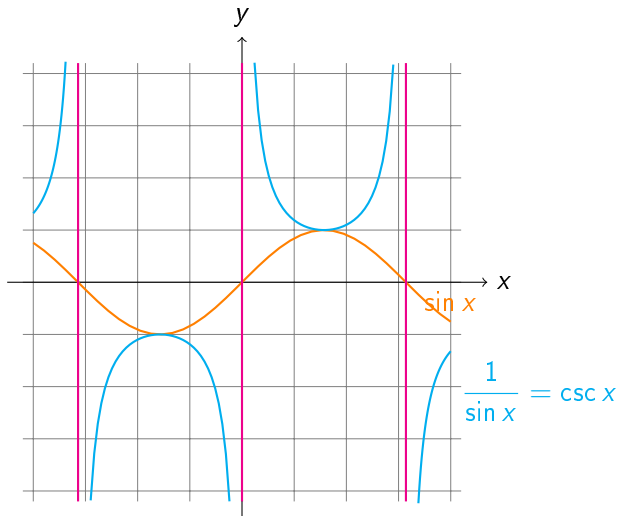
- 1 Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
  - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
  - A változás átlagos üteme; szelők
  - A határérték intuitív fogalma
- 2 A határérték precíz definíciója és kiszámítása
  - A határérték definíciója
  - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
  - Az adott  $\varepsilon$ -hoz tartozó  $\delta$  kiszámítása
  - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
  - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
- 3 Kiterjesztések
  - Jobb és bal oldali határértékek
  - (Véges) határérték a végtelenben
  - A végtelen, mint határérték
  - Aszimptoták, domináns tagok
- 4 Összefoglalás

## Definíció (Függőleges aszimptota)

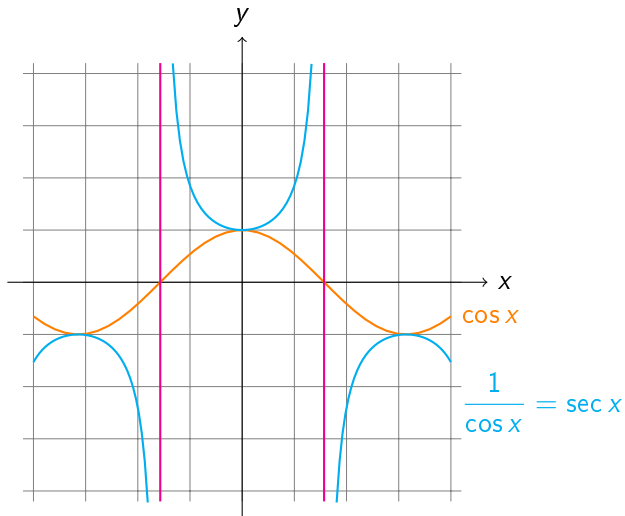
Az  $x = a$  egyenletű egyenes az  $y = f(x)$  függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha

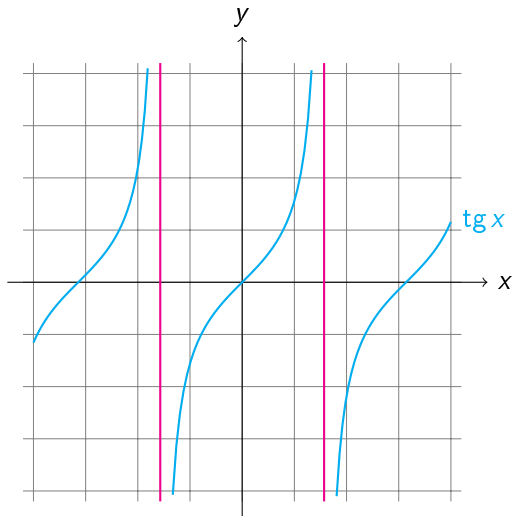
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ vagy ha } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

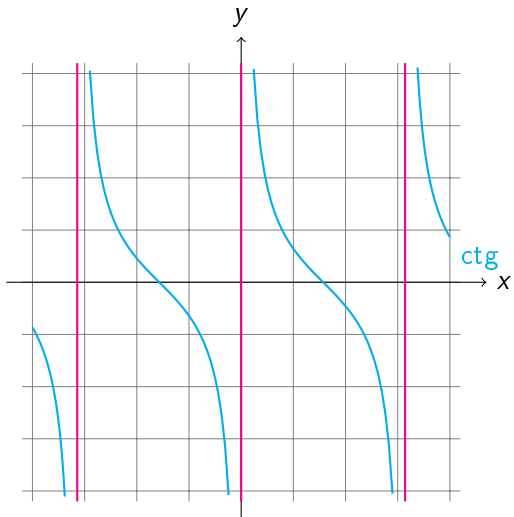












## Definíció (Vízszintes aszimptota)

Az  $y = b$  egyenletű egyenest az  $y = f(x)$  függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

## Példa

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}$$

## Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

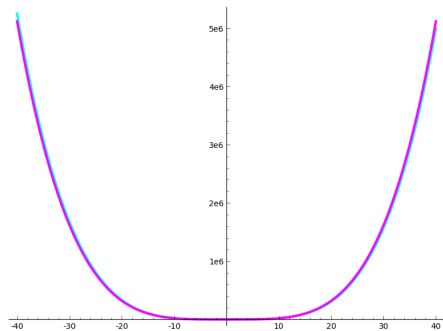
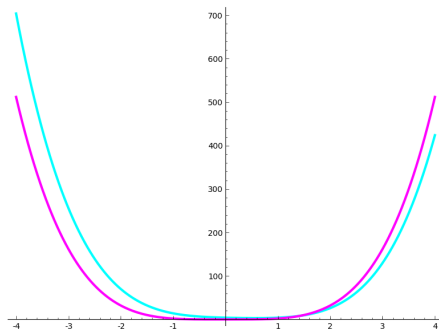
Legyen  $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$  és  $g(x) = 2x^4$ . Mit jelent az, hogy  $f$  és  $g$  „elég nagy” abszolút értékű  $x$ -ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

### Megoldás

Az  $f$  és a  $g$  hányadosának határértéke a  $\infty$  és  $-\infty$  helyeken:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{2x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{2}{x^4} \right)\end{aligned}$$

Elég nagy abszolút értékű  $x$ -ek esetén tehát  $f$  és  $g$  jó közelítéssel azonosnak tekinthető.



# Amit hibátlanul tudni kell!

- 1 Határérték-félék definíciói
- 2 Egységugrás függvény,  $\sin \frac{1}{x}$  határértéke 0-ban nem létezik
- 3 Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke
- 4 Szendvicstétel
- 5  $\frac{\sin x}{x}$  határértéke
- 6 Vízszintes és függőleges aszimptoták