Határérték
A „Thomas féle Kalkulus 1" című könyvet használó hallgatóknak

Összeállította: Wettl Ferenc

2014. október 5.

Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

Megoldás

Galileo Galilei (1564–1642) **szabadesés törvénye**: t idő alatt megtett út y

$$y = 4,9t^2$$

Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

Megoldás

Galileo Galilei (1564–1642) **szabadesés törvénye**: t idő alatt megtett út y

$$y = 4,9t^2$$

Átlagsebesség: a megtett Δy távolság elosztva a megtételéhez szükséges Δt nagyságú időtartammal.

Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

Megoldás

Galileo Galilei (1564–1642) **szabadesés törvénye**: t idő alatt megtett út y

$$y = 4,9t^2$$

Átlagsebesség: a megtett Δy távolság elosztva a megtételéhez szükséges Δt nagyságú időtartammal.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot 2^2 - 4,9 \cdot 1^2}{2-1} = 14,7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1\mathrm{s}$ és a $t = 2\mathrm{s}$ pillanatban.

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás

A kő átlagsebességét egy Δt hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban:

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás

A kő átlagsebességét egy Δt hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4,9 \cdot (t_0)^2}{\Delta t}$$

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás

A kő átlagsebességét egy Δt hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4,9 \cdot (t_0)^2}{\Delta t}$$

Δt	Átlagsebesség $[1, 1 + \Delta t]$-ben	Átlagsebesség $[2, 2 + \Delta t]$-ben
1	14,7	24,5
0,01	9,849	19,649
0,0001	9,8000	19,6000

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás

A kő átlagsebességét egy Δt hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4,9 \cdot (t_0)^2}{\Delta t}$$

Δt	Átlagsebesség $[1, 1 + \Delta t]$-ben	Átlagsebesség $[2, 2 + \Delta t]$-ben
1	14,7	24,5
0,01	9,849	19,649
0,0001	9,8000	19,6000

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9(t_0 + \Delta t)^2 - 4,9(t_0)^2}{\Delta t} = \frac{9,8 t_0 \Delta t + 4,9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9,8t_0 + 4,9\Delta t.$$

A pillanatnyi sebességek $t_0 = 1s$ esetén $9,8\frac{m}{s}$, $t_0 = 2s$ esetén $19,6\frac{m}{s}$

Definíció (Átlagos változási sebesség egy intervallumon)

Az $y = f(x)$ függvény átlagos változási sebessége az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

Definíció (Átlagos változási sebesség egy intervallumon)

Az $y = f(x)$ függvény átlagos változási sebessége az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h = \Delta x \neq 0$$

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek x_0 eleme, *kivéve esetleg magát az* x_0 *helyet*.

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek x_0 eleme, *kivéve esetleg magát az* x_0 *helyet*. Ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik x_0-t, Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek x_0 eleme, *kivéve esetleg magát az x_0 helyet*. Ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik x_0-t, akkor azt mondjuk, hogy f az L számhoz tart miközben x tart x_0-hoz; ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy f határértéke az x_0 pontban L. Jelölése:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ vagy } \lim_{x_0} f = L$$

Példa (Határérték és függvényérték)

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

Példa (Határérték és függvényérték)

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

Példa (Határérték és függvényérték)

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

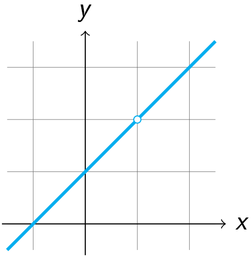
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

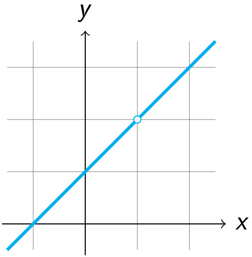
Megoldás

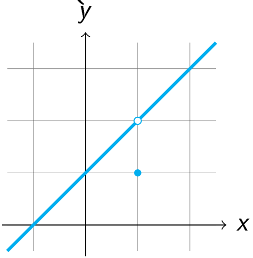
$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2 = h(1)$. $g(1) = 1 \neq 2$, f pedig nincs is értelmezve 1-ben.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

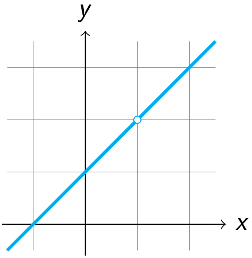


$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

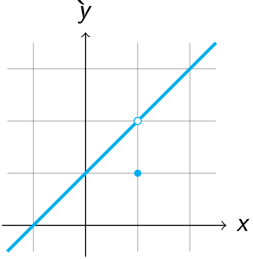




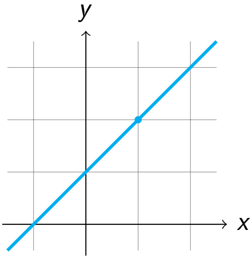
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ha } x\neq 1\\ 1 & \text{ha } x=1\end{cases}$$



$$f(x)=x+1$$



Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

(b) Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges x_0 esetén

Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

(b) Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

(b) Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

Például

$$\lim_{x \to 3} x = 3, \qquad \lim_{x \to -7} (4) = \lim_{x \to 2} (4) = 4.$$

Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

(a) $e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (ez az egységugrás függvény)

Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

(a) $e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (ez az egységugrás függvény)

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Példa (Amikor nem létezik határérték)

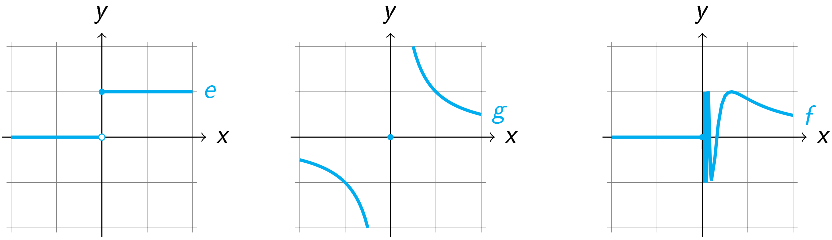
Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

(a) $e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (ez az egységugrás függvény)

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

Legyen $y = 2x - 1$, $x_0 = 4$. Milyen közel legyenek x értékei 4-hez, hogy az $y = 2x - 1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

Legyen $y = 2x - 1$, $x_0 = 4$. Milyen közel legyenek x értékei 4-hez, hogy az $y = 2x - 1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

Megoldás

x milyen értékei esetén teljesül az $|y - 7| < 2$ egyenlőtlenség? Mivel $|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$, ezért

Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

Legyen $y = 2x - 1$, $x_0 = 4$. Milyen közel legyenek x értékei 4-hez, hogy az $y = 2x - 1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

Megoldás

x milyen értékei esetén teljesül az $|y - 7| < 2$ egyenlőtlenség? Mivel $|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$, ezért

$$\begin{aligned}|2x - 8| &< 2\\ -2 < 2x - 8 &< 2\\ 6 < 2x &< 10\\ 3 < x &< 5\\ -1 < x - 4 &< 1\\ |x - 4| &< 1\end{aligned}$$

Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

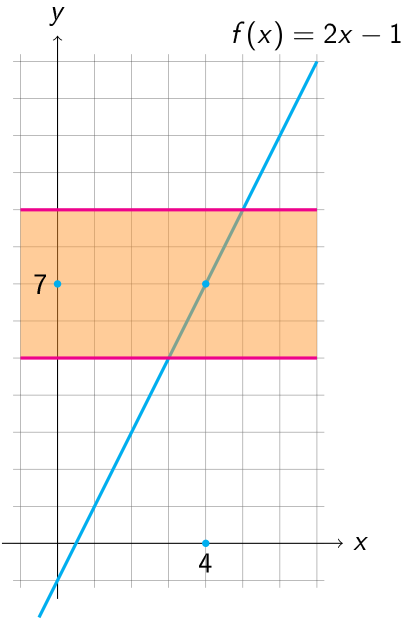
Legyen $y = 2x - 1$, $x_0 = 4$. Milyen közel legyenek x értékei 4-hez, hogy az $y = 2x - 1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

Megoldás

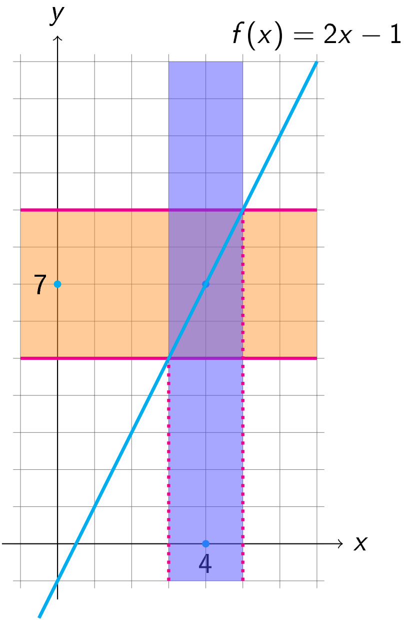
x milyen értékei esetén teljesül az $|y - 7| < 2$ egyenlőtlenség? Mivel $|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$, ezért

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1 \\ |x - 4| &< 1 \end{aligned}$$

Ha x és $x_0 = 4$ eltérése kisebb, mint 1, akkor y és $y_0 = 7$ eltérése kisebb, mint 2.



y
$f(x) = 2x - 1$
7
4
x


y
$f(x) = 2x - 1$
7
x
4

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok
4. Összefoglalás

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában.

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L),

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám,

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén,

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta$,

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$. Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right].$$

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok
4. Összefoglalás

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, és

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám. Olyan δ-t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|k - k| < \varepsilon$ következik.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám. Olyan δ-t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|k - k| < \varepsilon$ következik. Mivel azonban $k - k = 0$, a szóban forgó implikáció bármely pozitív δ esetén igaz.

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám. Olyan δ-t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|k - k| < \varepsilon$ következik. Mivel azonban $k - k = 0$, a szóban forgó implikáció bármely pozitív δ esetén igaz. Eszerint tehát $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$.

Megjegyzés (Hogyan keressük meg az f, L, x_0 és $\varepsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ-t?)

Azt a δ-t, amelyre tetszőleges x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Megjegyzés (Hogyan keressük meg az f, L, x_0 és $\varepsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ-t?)

Azt a δ-t, amelyre tetszőleges x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(1) *Az $|f(x) - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldásával* keressünk egy (a, b) nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.

Megjegyzés (Hogyan keressük meg az f, L, x_0 és $\varepsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ-t?)

Azt a δ-t, amelyre tetszőleges x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(1) *Az $|f(x) - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldásával* keressünk egy (a, b) nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.

(2) *Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot,* amelyre teljesül, hogy az x_0 középpontú $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyílt intervallum az (a, b) intervallum belsejébe esik.

Példa

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Megoldás

Bizonyítandó: bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$$

Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$
\begin{gathered}
|x^2 - 4| < \varepsilon \\
-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \\
4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \\
\sqrt{4 - \varepsilon} < |x| < \sqrt{4 + \varepsilon} \\
\sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}
\end{gathered}
$$

Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$|x^2 - 4| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$$
$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$
$$\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon}$$
$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

(Gyökvonásnál feltettük, hogy $\varepsilon < 4$.) Tehát ha $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ és $x \neq 2$, akkor $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$
\begin{gathered}
|x^2 - 4| < \varepsilon \\
-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \\
4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \\
\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon} \\
\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}
\end{gathered}
$$

(Gyökvonásnál feltettük, hogy $\varepsilon < 4$.) Tehát ha $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ és $x \neq 2$, akkor $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

(2) Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, melyre $(2 - \delta, 2 + \delta) \subseteq (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$.

Megoldás (folytatás)

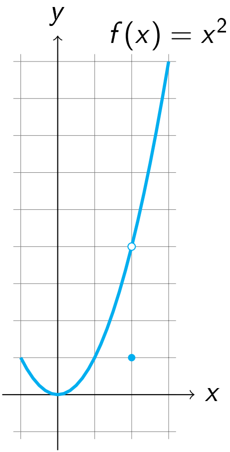
(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$\begin{gathered} |x^2 - 4| < \varepsilon \\ -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \\ 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \\ \sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon} \\ \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \end{gathered}$$

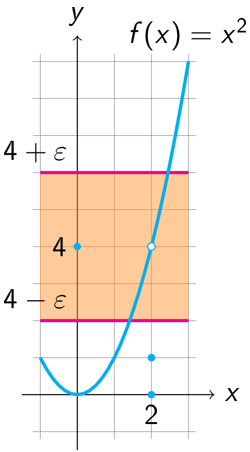
(Gyökvonásnál feltettük, hogy $\varepsilon < 4$.) Tehát ha $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ és $x \neq 2$, akkor $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

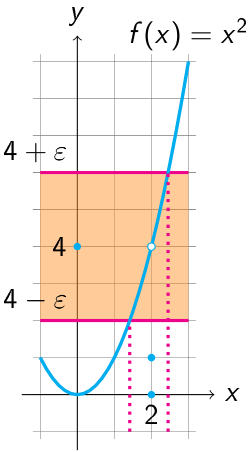
(2) Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, melyre $(2-\delta, 2+\delta) \subseteq (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$.

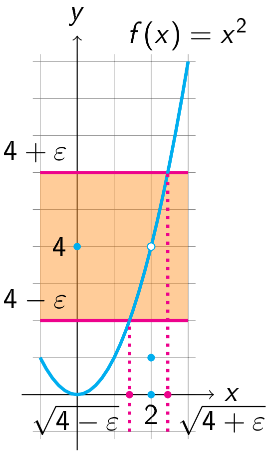
$$\delta = \min\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\}.$$



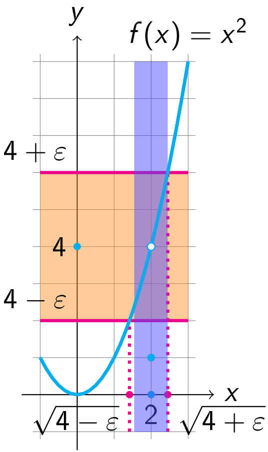
y
$f(x) = x^2$
x


y
$f(x) = x^2$
$4+\varepsilon$
4
$4-\varepsilon$
x
2


y
$f(x) = x^2$
$4+\varepsilon$
4
$4-\varepsilon$
x
2



y
$f(x) = x^2$
$4+\varepsilon$
4
$4-\varepsilon$
x
$\sqrt{4-\varepsilon}$
2
$\sqrt{4+\varepsilon}$



y
$f(x) = x^2$
$4+\varepsilon$
4
$4-\varepsilon$
x
$\sqrt{4-\varepsilon}$
2
$\sqrt{4+\varepsilon}$

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_{c}(f \pm g) = L \pm M$,

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$,

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L$,

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_c \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_c \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_c f^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_c \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_c f^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \to c} f(x) = L$ és $\lim_{x \to c} g(x) = M$, akkor

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to c} f(x) = L$ és $\lim_{x\to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M.$$

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \to c} f(x) = L$ és $\lim_{x \to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám.

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \to c} f(x) = L$ és $\lim_{x \to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül,

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \to c} f(x) = L$ és $\lim_{x \to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to c} f(x) = L$ és $\lim_{x\to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \to c} f(x) = L$ és $\lim_{x \to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$,

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$, és így $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$, és így $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$, és így $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Tétel

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

Tétel

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_c P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Tétel

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_{c} P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Tétel

Ha P és Q polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

Tétel

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_c P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Tétel

Ha P és Q polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_c \frac{P}{Q} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll $\lim_c f = L$ is.

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll $\lim_c f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$,

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_{c} g = \lim_{c} h = L,$$

akkor fennáll $\lim\limits_{c} f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim_c f$ és $\lim_c g$ határértékek, akkor

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll $\lim_c f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim_c f$ és $\lim_c g$ határértékek, akkor

$$\lim_c f \leq \lim_c g.$$

Tétel (Szendvicstétel)

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll $\lim\limits_c f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim_c f$ és $\lim_c g$ határértékek, akkor

$$\lim_c f \leq \lim_c g.$$

Példa (A szendvicstétel alkalmazása)

Ha

$$1 - x^2 \leq u(x) \leq 1 + 2x^2,$$

Példa (A szendvicstétel alkalmazása)

Ha

$$1 - x^2 \leq u(x) \leq 1 + 2x^2,$$

mit mondhatunk a $\lim_{x\to 0} u(x)$ határértékről?

Példa (A szendvicstétel alkalmazása)

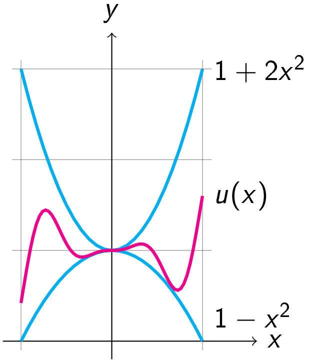
Ha

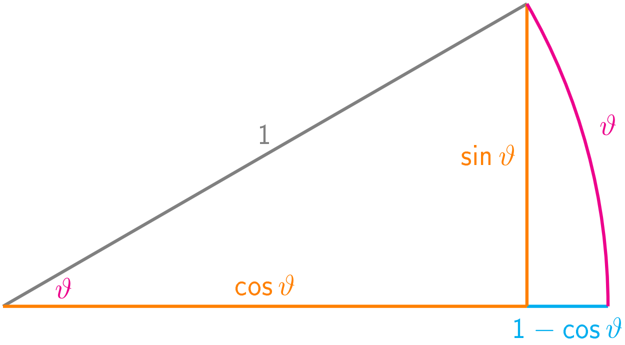
$$1 - x^2 \le u(x) \le 1 + 2x^2,$$

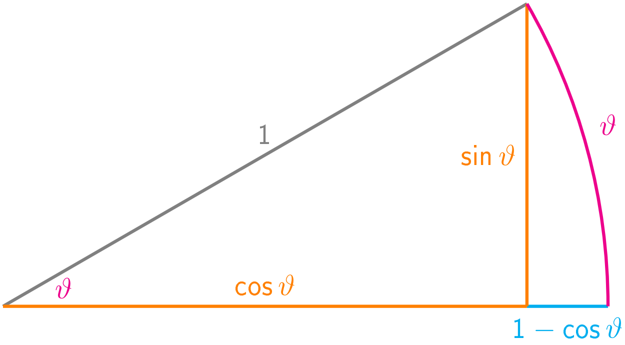
mit mondhatunk a $\lim_{x \to 0} u(x)$ határértékről?

Megoldás

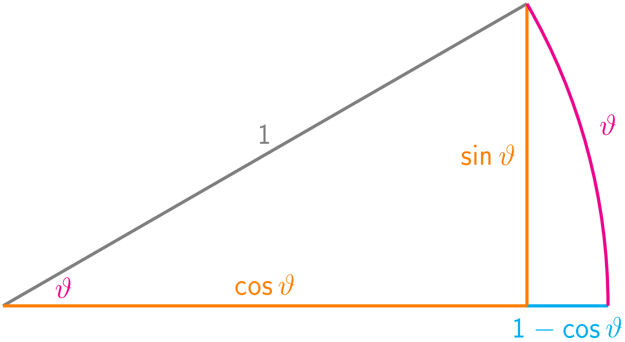
$\lim_{x \to 0} (1 - x^2) = \lim_{x \to 0} (1 + 2x^2) = 1$, így
$\lim_{x \to 0} u(x) = 1$




1
$\sin\vartheta$
ϑ
ϑ
$\cos\vartheta$
$1-\cos\vartheta$



$|\sin\vartheta| \leqslant |\vartheta|$



$|\sin\vartheta| \leqslant |\vartheta|$

$0 \leqslant 1-\cos\vartheta \leqslant |\vartheta|$

Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

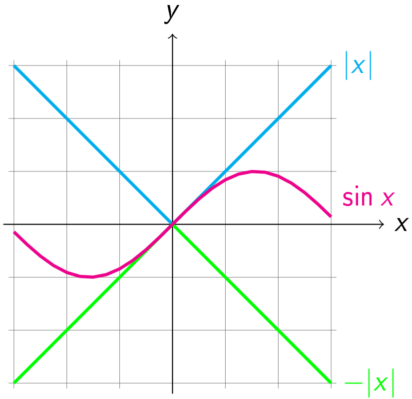
$-|\vartheta| \le \sin\vartheta \le |\vartheta|$, és $\lim\limits_{\vartheta\to 0}(-|\vartheta|) = \lim\limits_{\vartheta\to 0}(|\vartheta|) = 0$, ezért

$$\lim_{\vartheta\to 0} \sin\vartheta = 0.$$

Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

$-|\vartheta| \le \sin\vartheta \le |\vartheta|$, és $\lim_{\vartheta\to 0}(-|\vartheta|) = \lim_{\vartheta\to 0}(|\vartheta|) = 0$, ezért

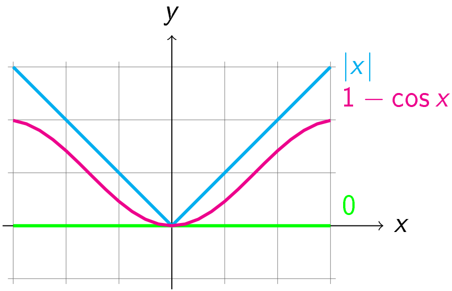
$$\lim_{\vartheta\to 0} \sin\vartheta = 0.$$



Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

$0 \leqslant 1 - \cos\vartheta \leqslant |\vartheta|$, így

$$\lim_{\vartheta\to 0}(1-\cos\vartheta) = 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{\vartheta\to 0}\cos\vartheta = 1$$



1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok
4. Összefoglalás

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése:

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = L$),

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \left[x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right].$$

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \, [\, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \,].$$

Az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése:

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = L$), ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [\,x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,].$$

Az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = L$),

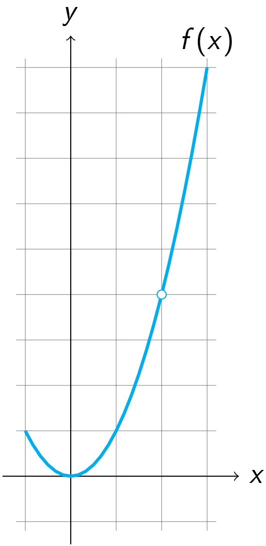
Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = L$), ha

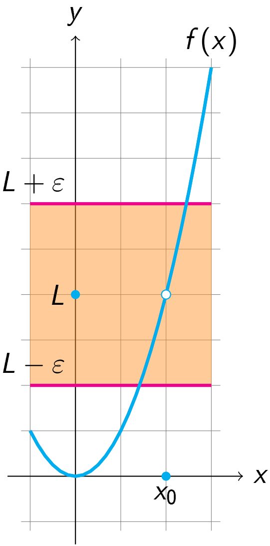
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

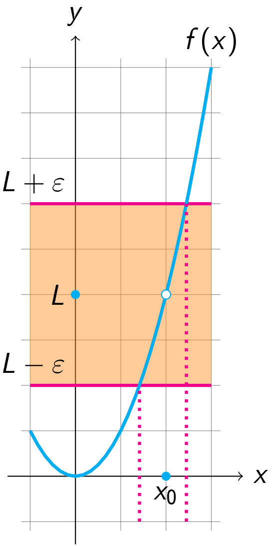
Az f függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = L$), ha

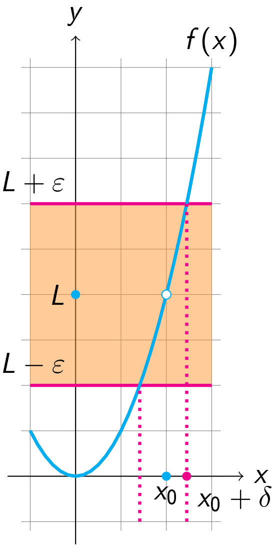
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$



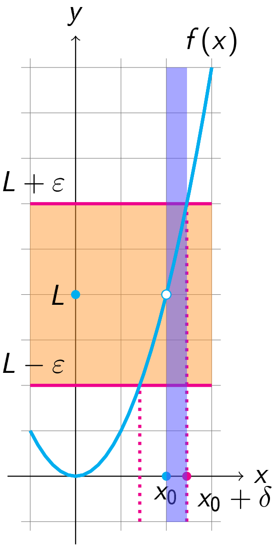
y
f(x)
x


y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
x_0

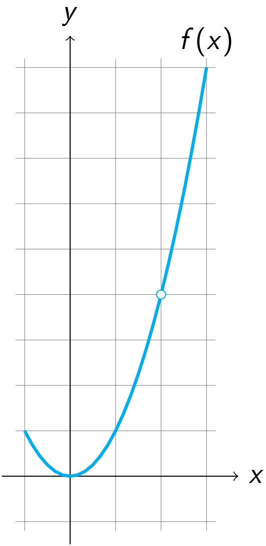

y
f(x)
L + ε
L
L − ε
x
x0

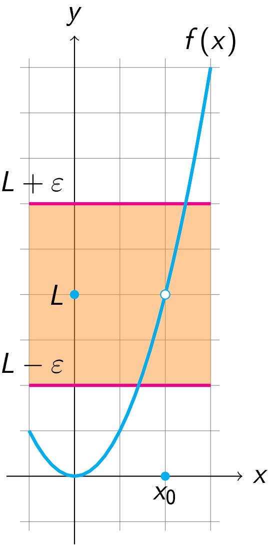


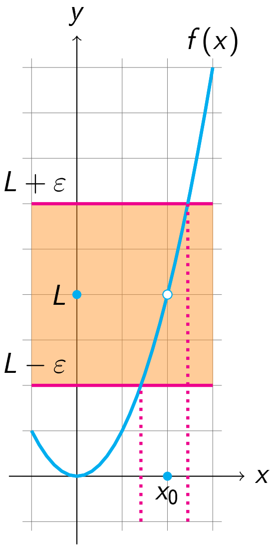
y
$f(x)$
$L + \varepsilon$
L
$L - \varepsilon$
x
x_0
$x_0 + \delta$



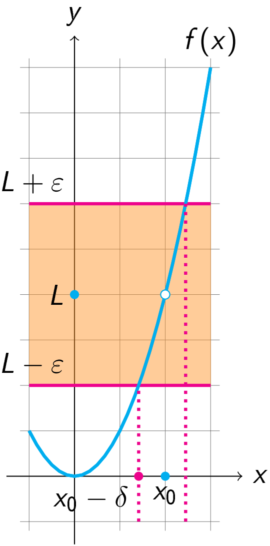
y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
x_0
$x_0+\delta$


y
f(x)
x

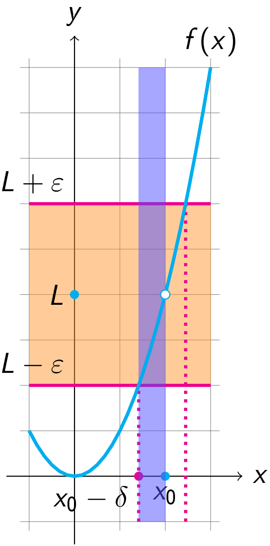

y
f(x)
L + ε
L
L − ε
x
x0



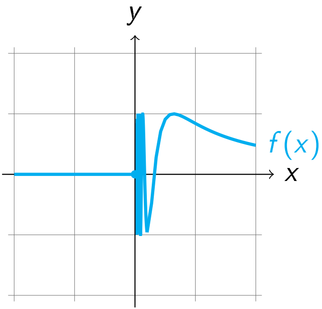
y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
x_0



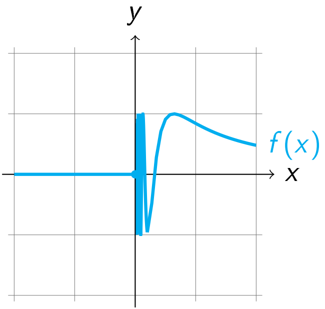
y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
$x_0 - \delta$
x_0


y
$f(x)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
x
$x_0-\delta$
x_0

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$



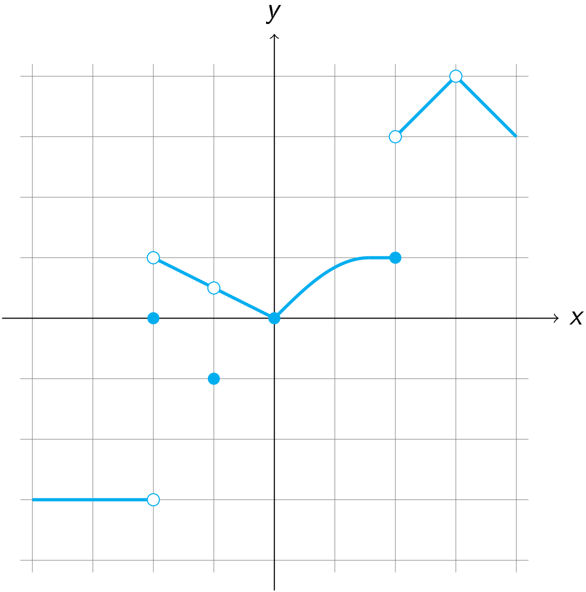
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{NEM LÉTEZIK}$$

Tétel (Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata)

f-nek pontosan akkor létezik a c helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlőek:

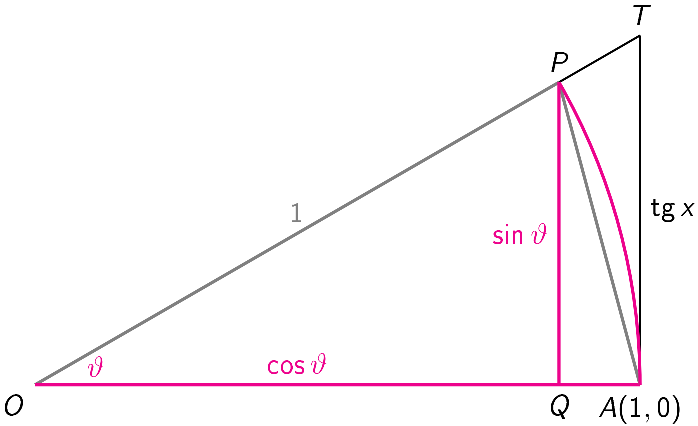
$$\lim_{c} f = L \Leftrightarrow \lim_{c^+} f = L \text{ és } \lim_{c^-} f = L.$$

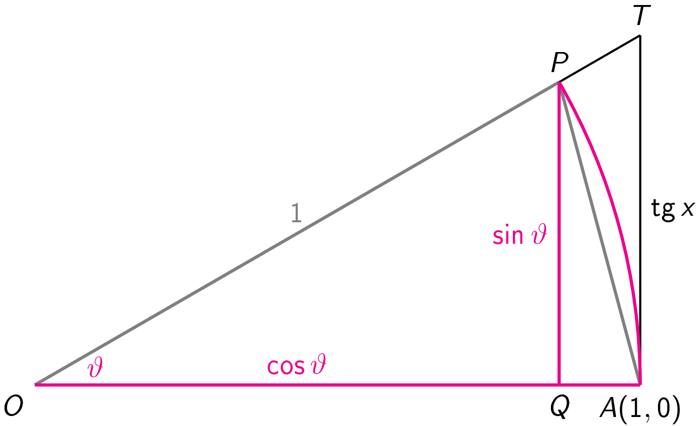

y
x

Tétel (A *sin*(ϑ)/ϑ függvény határértéke)

Ha a ϑ szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\vartheta\to 0}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}=1. \tag{1}$$


T
P
1
$\sin\vartheta$
$\operatorname{tg} x$
ϑ
$\cos\vartheta$
O
Q
$A(1,0)$



$$OAP\,\triangle \text{ területe } < OAP \text{ körcikk területe } < OAT\,\triangle \text{ területe.}$$

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 ($0 < \vartheta < \pi/2$):

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 $(0 < \vartheta < \pi/2)$:

$$OAP \triangle \text{ területe } < OAP \text{ körcikk területe } < OAT \triangle \text{ területe.}$$

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 ($0 < \vartheta < \pi/2$):

$$OAP \triangle \text{ területe } < OAP \text{ körcikk területe } < OAT \triangle \text{ területe.}$$

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\vartheta = \frac{1}{2}\sin\vartheta$$

$$T_{OAP \text{ körcikk}} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{ ívhossz } \cdot \text{ sugár } = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \vartheta = \frac{\vartheta}{2}$$

$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta$$

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.
1. A jobb oldali határérték 1 $(0 < \vartheta < \pi/2)$:

$$OAP \triangle \text{ területe } < OAP \text{ körcikk területe } < OAT \triangle \text{ területe.}$$

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\vartheta = \frac{1}{2} \sin\vartheta$$
$$T_{OAP\text{ körcikk}} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{ ívhossz } \cdot \text{ sugár } = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \vartheta = \frac{\vartheta}{2}$$
$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\vartheta$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2}\sin\vartheta < \frac{1}{2}\vartheta < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta$$

$\frac{1}{2}\sin\vartheta$-val osztva ($\sin\vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta}$$

$\frac{1}{2}\sin\vartheta$-val osztva ($\sin\vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{1}$$

$\frac{1}{2}\sin\vartheta$-val osztva ($\sin\vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{1}$$

a szendvicstétel alapján

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$$

$\frac{1}{2}\sin\vartheta$-val osztva ($\sin\vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{1}$$

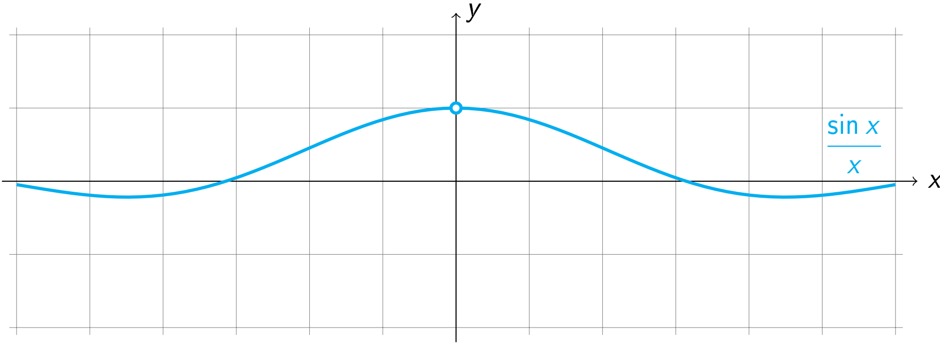
a szendvicstétel alapján

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$$

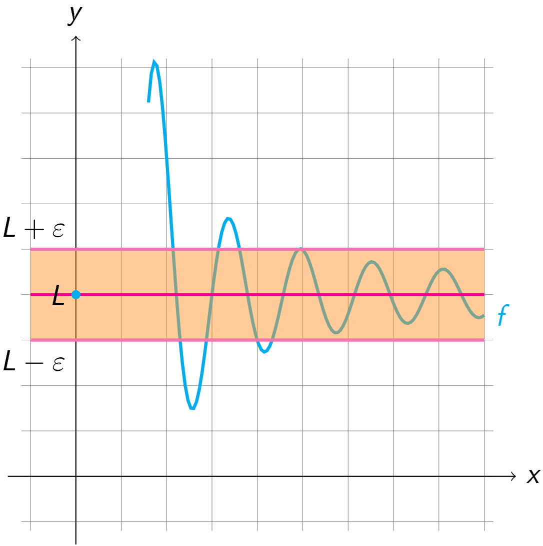
2. $\sin\vartheta$ és ϑ páratlan függvények $\to$ $(\sin\vartheta)/\vartheta$ páros $\to$

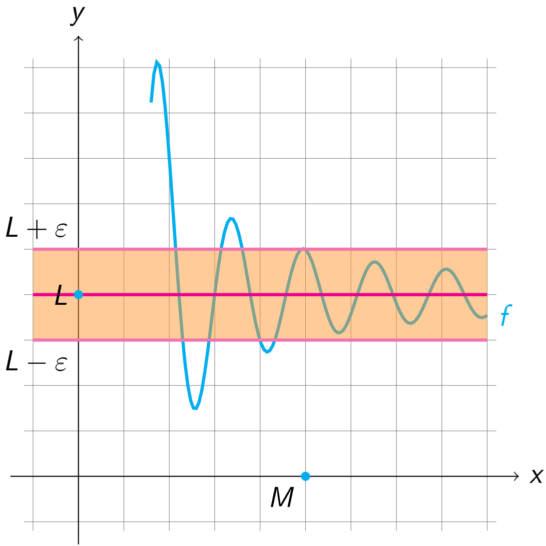
$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to 0^-} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1,$$

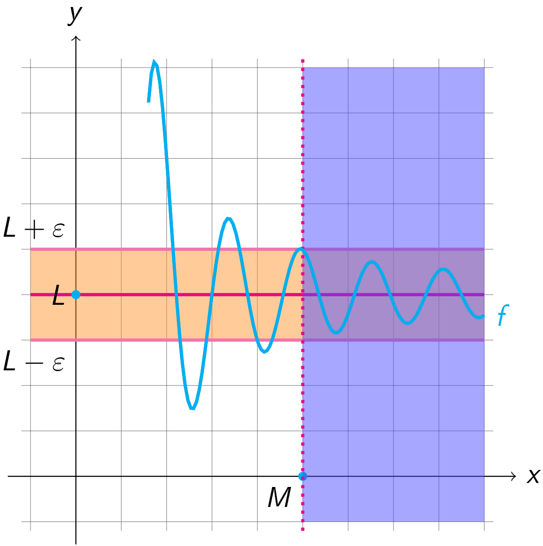
így $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1.$



y
x
$\frac{\sin x}{x}$


y
L + ε
L
L − ε
f
x


y
x
L + ε
L
L − ε
M
f



y
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
f
x
M

Definíció (Határérték a végtelenben)

1. Az f függvény **határértéke a végtelenben** L ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ vagy $\lim\limits_{\infty} f = L$), ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M\ \forall x\ [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Definíció (Határérték a végtelenben)

1. Az f függvény **határértéke a végtelenben** L ($\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ vagy $\lim_{\infty} f = L$), ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M\ \forall x\ [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

2. Az f függvény **határértéke a mínusz végtelenben** L ($\lim_{-\infty} f = L$), ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x\ [x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim\limits_{\pm\infty}(fg) = LM$,

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim\limits_{\pm\infty}(fg) = LM$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim\limits_{\pm\infty}(kf) = kL$,

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim\limits_{\pm\infty}(fg) = LM$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim\limits_{\pm\infty}(kf) = kL$,

(4) Hányados: $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_{\pm\infty}(fg) = LM$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_{\pm\infty}(kf) = kL$,

(4) Hányados: $\lim_{\pm\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_{\pm\infty} f^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = L \text{ és } \lim_{\pm\infty} g = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim\limits_{\pm\infty}(f \pm g) = L \pm M$,

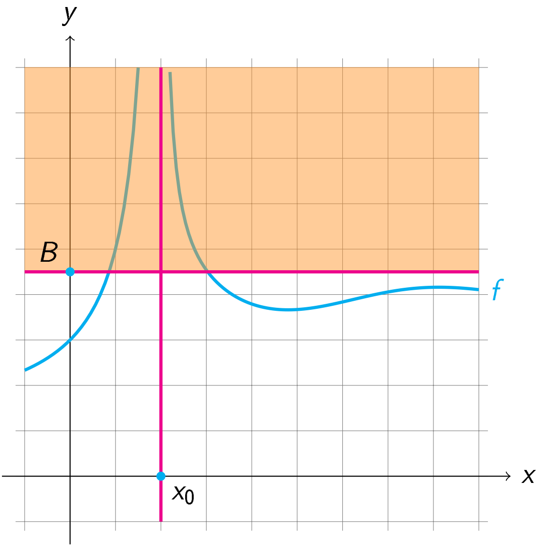
(2) Szorzat: $\lim\limits_{\pm\infty}(fg) = LM$,

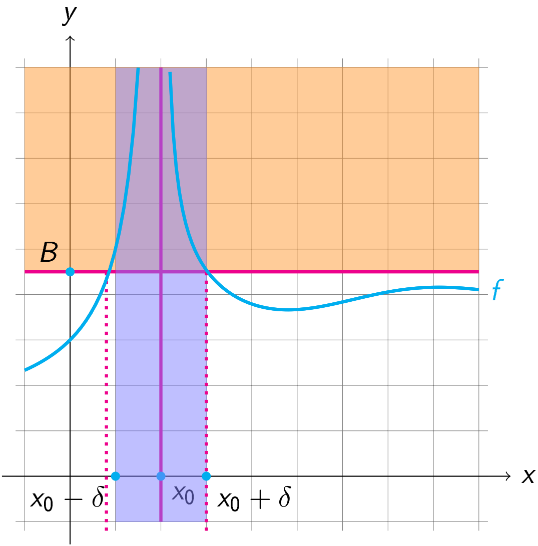
(3) Konstanssal való szorzás: $\lim\limits_{\pm\infty}(kf) = kL$,

(4) Hányados: $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} f^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - **A végtelen, mint határérték**
   - Aszimptoták, domináns tagok
4. Összefoglalás


y
B
f
x
x0


y
x
B
f
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$

Definíció (Végtelen határértékek)

1. Az f határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

Definíció (Végtelen határértékek)

1. Az f határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; [\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B \,].$$

Definíció (Végtelen határértékek)

1. Az f határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az f határértéke az x_0 helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = -\infty,$$

ha

Definíció (Végtelen határértékek)

1. Az f határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

$$\forall B\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B \,].$$

2. Az f határértéke az x_0 helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = -\infty,$$

ha

$$\forall B\ \exists\delta > 0\ \forall x\ [\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < B \,]$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B\, \exists \delta > 0\, \forall x\, [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B]$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B\,\exists\delta>0\,\forall x\,[0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\frac{1}{x^2}>B]$$

$\frac{1}{x^2}>B$ pontosan akkor, ha $x^2<\frac{1}{B}$, azaz ha $|x|<\frac{1}{\sqrt{B}}$. Legyen $\delta\le 1/\sqrt{B}$, akkor minden x-re

$$|x|<\delta\Rightarrow\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}\ge B,$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B\, \exists \delta > 0\, \forall x\, [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B]$$

$\frac{1}{x^2} > B$ pontosan akkor, ha $x^2 < \frac{1}{B}$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$. Legyen $\delta \leq 1/\sqrt{B}$, akkor minden x-re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B,$$

azaz

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \; \exists M \; \forall x \; [\, x > M \Rightarrow f(x) > B \,].$$

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

$$\forall B\ \exists M\ \forall x\ [\, x > M \Rightarrow f(x) > B\,].$$

2. Az f függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = -\infty,$$

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

$$\forall B\ \exists M\ \forall x\ [\, x > M \Rightarrow f(x) > B\,].$$

2. Az f függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = -\infty,$$

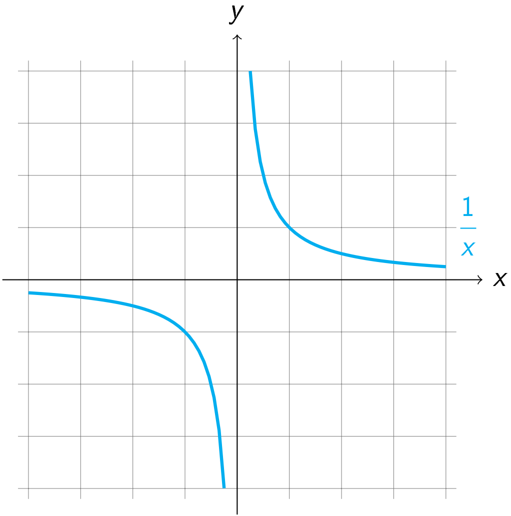
ha

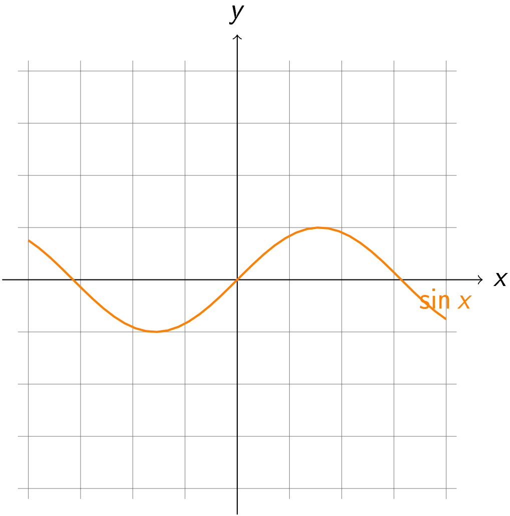
$$\forall B\ \exists M\ \forall x\ [\, x > M \Rightarrow f(x) < B\,].$$

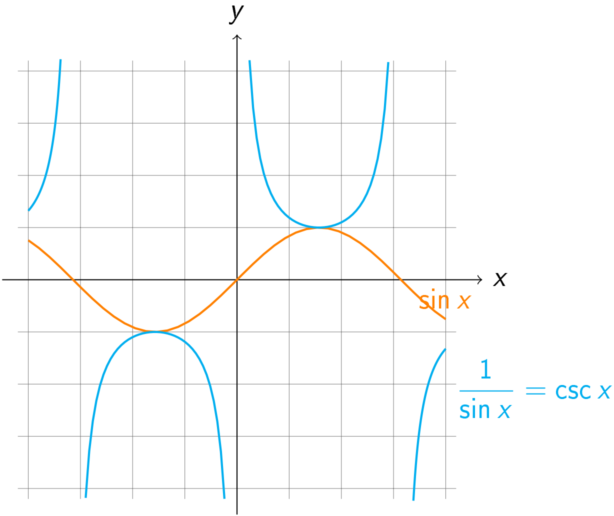
Definíció (Függőleges aszimptota)

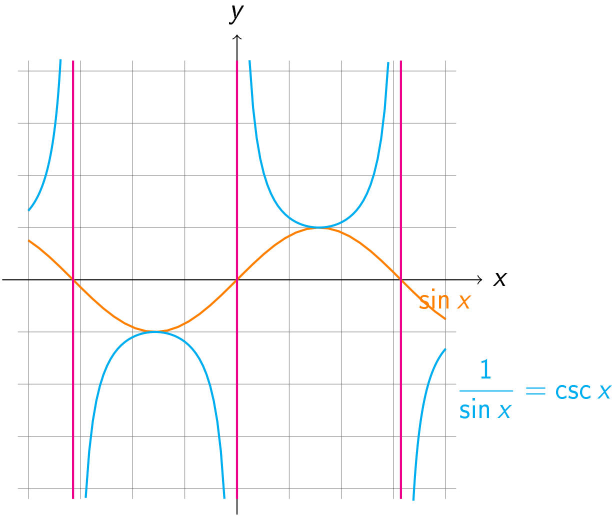
Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha

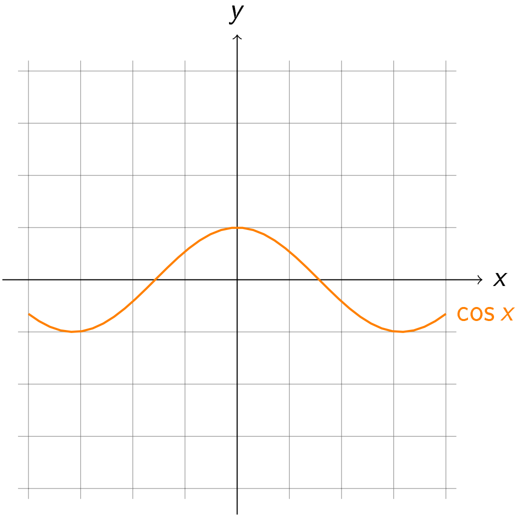
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{vagy ha} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$


y
x
$\frac{1}{x}$

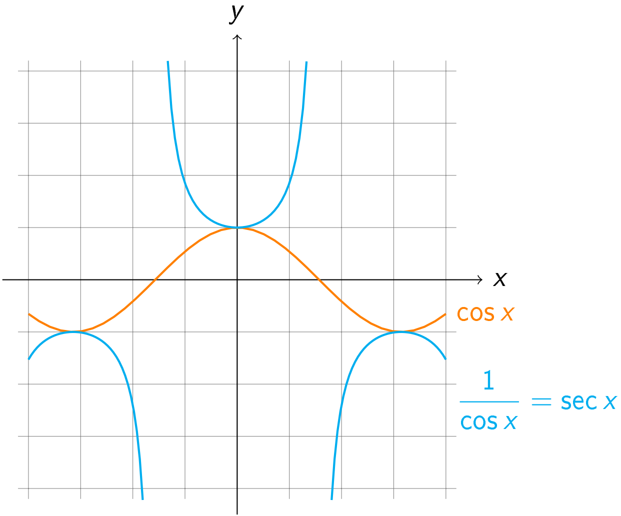

y
x
sin x

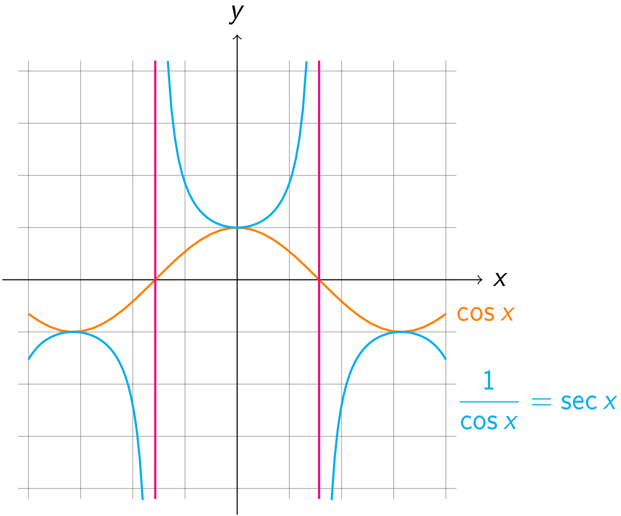

y
x
sin x
$\frac{1}{\sin x} = \csc x$

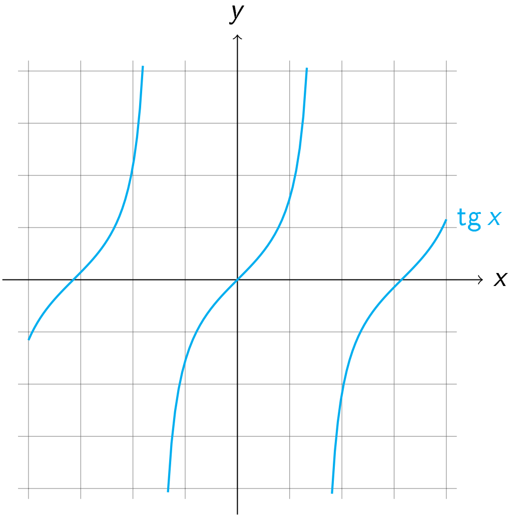

y
x
sin x
$\frac{1}{\sin x} = \csc x$

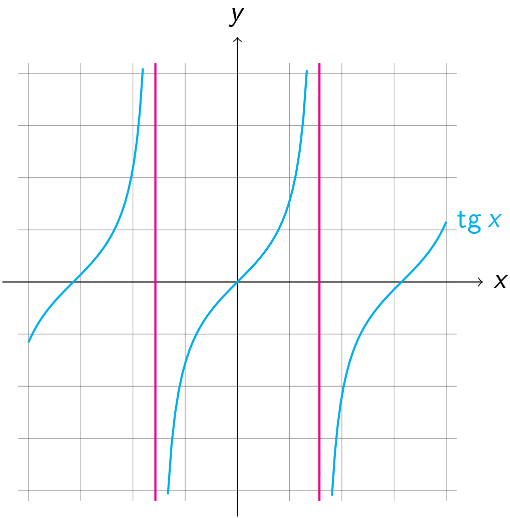


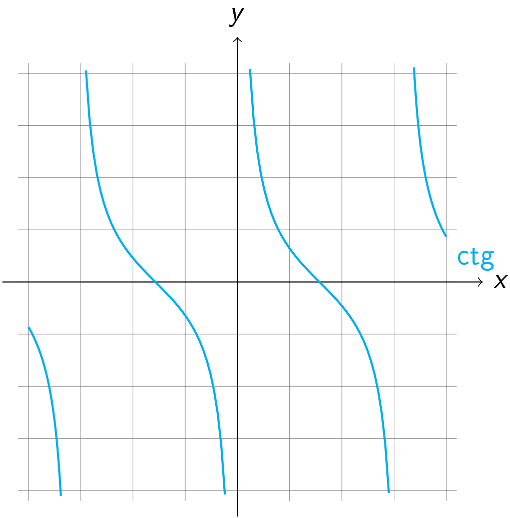
y
x
cos x

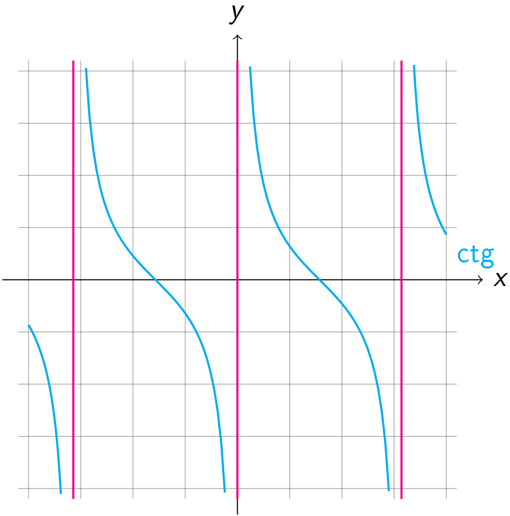

y
x
cos x
1/cos x = sec x


y
x
cos x
1/cos x = sec x


y
x
tg x


y
x
tg x


y
x
ctg


y
x
ctg

Definíció (Vízszintes aszimptota)

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Példa

$$\frac{1}{x}, \; \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}$$

Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

Legyen $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^4$. Mit jelent az, hogy f és g „elég nagy" abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

Legyen $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^4$. Mit jelent az, hogy f és g „elég nagy" abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

Megoldás

Az f és a g hányadosának határértéke a ∞ és $-\infty$ helyeken:

Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

Legyen $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^4$. Mit jelent az, hogy f és g „elég nagy" abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

Megoldás

Az f és a g hányadosának határértéke a ∞ és $-\infty$ helyeken:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{2}{x^4}\right)$$

Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

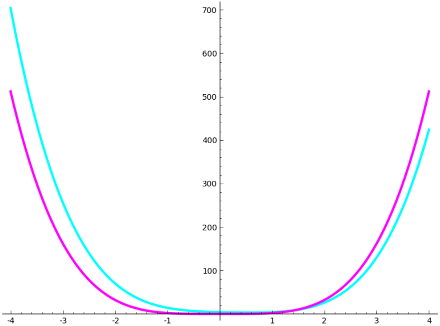
Legyen $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^4$. Mit jelent az, hogy f és g „elég nagy" abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

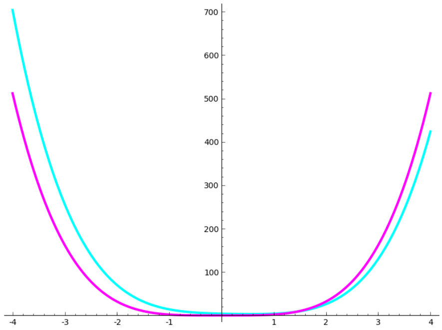
Megoldás

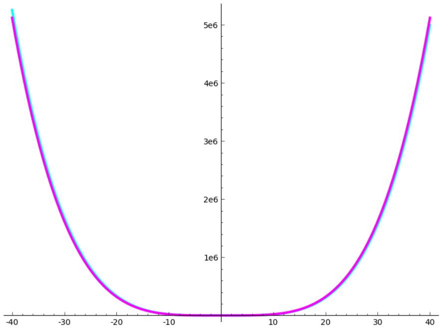
Az f és a g hányadosának határértéke a ∞ és $-\infty$ helyeken:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{2x^4} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{2}{x^4}\right)$$

Elég nagy abszolút értékű x-ek esetén tehát f és g jó közelítéssel azonosnak tekinthető.


700
600
500
400
300
200
100
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4


700
600
500
400
300
200
100
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4


5e6
4e6
3e6
2e6
1e6
-40
-30
-20
-10
10
20
30
40

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik
3. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik
3. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke
4. Szendvicstétel

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik
3. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke
4. Szendvicstétel
5. $\dfrac{\sin x}{x}$ határértéke

Amit hibátlanul tudni kell!

1. Határérték-félék definíciói
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik
3. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke
4. Szendvicstétel
5. $\dfrac{\sin x}{x}$ határértéke
6. Vízszintes és függőleges aszimptoták