Folytonosság

Összeállította: Wettl Ferenc

2014. október 9.

1. A folytonosság fogalma
   - Pontbeli folytonosság
   - Féloldali folytonosság
   - Folytonosság
   - Folytonos kiterjesztés
   - Bolzano-tétel

Definíció

A valós f függvény $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományának egy c pontjában folytonos, ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f\ \left[\,|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,\right].$$

Definíció

c az f szakadási pontja/helye, ha f c-ben nem folytonos (de azért a definíció szerint ott értelmezve van).

Definíció

c megszüntethető szakadási helye/pontja f-nek, ha $\lim\limits_{c} f$ létezik, de $\lim\limits_{c} f \neq f(c)$.

c ugráshelye f-nek, ha $\lim\limits_{c^-} f$ és $\lim\limits_{c^+} f$ határértékek végesek, de különbözők.

A többi szakadási helyet lényeges szakadási helynek nevezzük.

Különböző terminológiai elnevezések használatosak, mi nem fogjuk szakadási helynek nevezni azt, ahol f nincs értelmezve.

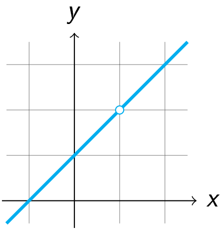
Definíció

c **hézagpontja** f-nek, ha létezik $\lim\limits_{c^-} f$ és $\lim\limits_{c^+} f$, $\lim\limits_{c^-} f = \lim\limits_{c^+} f$, de f nincs értelmezve c-ben. (Pl. $\frac{x^2-1}{x-1}$-nek hézagpontja van az $x = 1$ pontban.)

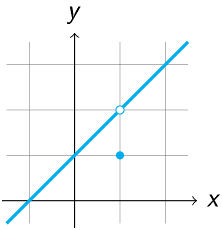
Definíció

c **pólusa** f-nek, ha $\lim\limits_{c^+} f = \pm\infty$ és $\lim\limits_{c^-} f = \pm\infty$. (Pl. $\frac{x^2-1}{x-2}$-nek pólusa van az $x = 2$ pontban.)

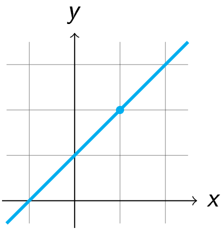
$$x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$



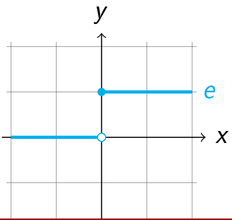
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



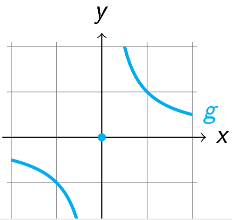
$$x \mapsto x+1$$



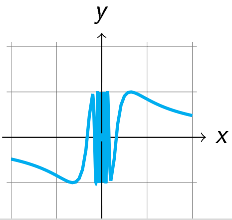
$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geqslant 0 \end{cases}$$



$$x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



Definíció

A valós f függvény értelmezési tartományának egy c pontjában jobbról folytonos, ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \left[0 \leqslant x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\right].$$

Definíció

A valós f függvény értelmezési tartományának egy c pontjában balról folytonos, ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \left[0 \leqslant c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\right].$$

Állítás

Ha létezik $\lim\limits_{c^+} f$, és $\lim\limits_{c^+} f = f(c)$, akkor f jobbról folytonos c-ben.

Állítás

Ha létezik $\lim\limits_{c^-} f$, és $\lim\limits_{c^-} f = f(c)$, akkor f balról folytonos c-ben.

Példa

A valószínűségi változók eloszlásfüggvénye balról folytonos, ha a

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

képlettel definiáljuk.

Definíció

f folytonos, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Definíció

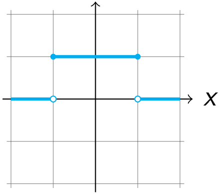
Az f függvény folytonos az I itervallumon, ha az I intervallumra megszorított $f|_I$ függvény folytonos.

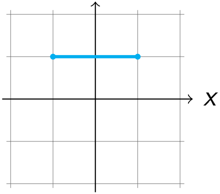
Nem biztos, hogy f folytonos I végpontjaiban, de $f|_I$-nek a végpontokban csak félig kell folytonosnak lennie.

Állítás

Az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha

- az $[a, b]$ intervallum minden belső c pontjában $\lim_c f = f(c)$,
- az a végpontban $\lim_{a^+} f = f(a)$,
- a b végpontban $\lim_{b^-} f = f(b)$.


x


x

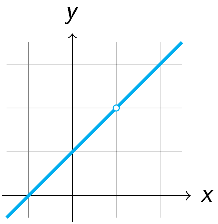
Állítás

Minden polinom és minden racionális törtfüggvény (kép polinom hányadosa) folytonos függvény.

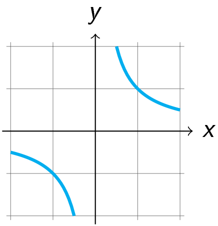
Példa

$x^5 - 4x^2 + x - 100$, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ folytonos függvények! (Mert értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak)

$x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$



$x \mapsto \frac{1}{x}$



Tétel

Ha g folytonos a c pontban, f pedig az $g(c)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos c-ben.

$$c \xrightarrow{\boxed{g}} g(c) \xrightarrow{\boxed{f}} f(g(c)) = (f \circ g)(c)$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

Példa

$x \mapsto |x|$, $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^4-4}$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \left|\dfrac{x^3+1}{x^4-4}\right|$ folytonos

Példa

$x \mapsto |x|$, $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^4-4}$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \left|\dfrac{x^3+1}{x^4-4}\right|$ folytonos

Példa

$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto 4-x^2$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ folytonos

Definíció

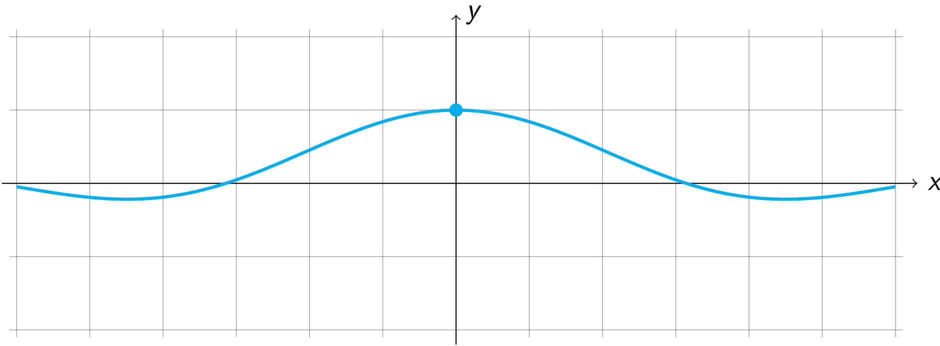
Ha f a c helyen nincs értelmezve, de létezik az $L = \lim_c f$ határérték, akkor az

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq c, \\ L & \text{ha } x = c \end{cases}$$

függvényt az f c-re való kiterjesztésének nevezzük.

Példa

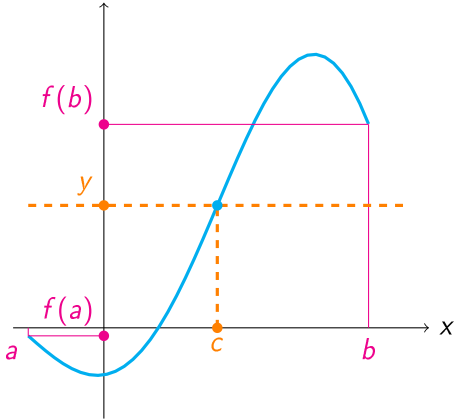
A $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény folytonosan kiterjeszthető az egész számegyenesre.



$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Tétel (Bolzano-tétel)

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, minden $f(a)$ és $f(b)$ szám közé eső y-hoz létezik olyan c, hogy $f(c) = y$.



Következmény

Egy zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete intervallum (később: zárt intervallum).

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$-n, és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, akkor f-nek van zérushelye az (a, b) intervallumon.