

# Egyenes és sík

Wetzl Ferenc

2014. szeptember 30.

- 1 Egyenes és szakasz
  - Egyenes
  - Szakasz
  - Egyenesvonalú egyenletes mozgás
  - Egyenes és pont távolsága
- 2 Sík
  - Sík egyenlete
  - Sík és egyenes
  - Sík és pont
- 3 Összefoglalás

## Definíció

Az adott  $P_0$  ponton áthaladó  $e$  egyenes **irányvektor**ának nevezünk minden olyan  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ) vektort, amely párhuzamos az  $e$  egyenessel.

## Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}$  irányvektorú  $e$  egyenes **vektoregyenlete**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol  $\mathbf{r}$  az  $e$  egyenes egy  $P(x, y, z)$  pontjának helyvektora, míg  $\mathbf{r}_0$  a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponté.

## Megjegyzés

A fenti egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

## Tétel (Egyenes explicit (paraméteres) egyenletrendszere)

Ha a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ , akkor az egyenes **explicit egyenletrendszere**

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

ahol a  $t$  paraméter az összes valós számon végigfut.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen  $P_0(2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ .

Megoldás

$$x = 2 + 4t, \quad y = -1 + 3t, \quad z = 3.$$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen  $P_0(2, -1, 3)$ ,  $P_1(6, 2, 3)$ .

Megoldás

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$$

$$x = 2 + 4t, \quad y = -1 + 3t, \quad z = 3.$$

## Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a  $P_0(2, -1, 3)$ ,  $P_1(6, 2, 3)$  pontokat összekötő szakasz pontjait.

## Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:

$x = 2 + 4t$ ,  $y = -1 + 3t$ ,  $z = 3$ . A  $t$  paraméterű pontot jelölhetjük  $P_t$ -vel, hisz a  $P_t(x, y, z) = (2 + 4t, -1 + 3t, 3)$  jelöléssel  $t = 0$  esetén épp a  $P_0$ ,  $t = 1$  esetén épp a  $P_1$  pontot kapjuk. Így a  $\overline{P_0P_1}$  szakasz paraméterezése:  
 $x = 2 + 4t$ ,  $y = -1 + 3t$ ,  $z = 3$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

## Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A  $P_0(2, -1, 3)$  pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az  $\mathbf{a} = (4, 3, 0)$  irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

### Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség = 10, egységvektor =  $(4/5, 3/5, 0)$ , hisz  $|\mathbf{a}| = 5$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}) \\ &= (2, -1, 3) + 6 \cdot 10 \cdot (4/5, 3/5, 0) = (50, 35, 3).\end{aligned}$$

(E példában a sebességvektor  $\mathbf{v} = (48, 36, 0)$  az az irányvektor, mely a vektoregyenlet képletében szereplő  $\mathbf{v}$  vektorral egybeesik.)

## Tétel (Egyenes és pont távolsága)

A  $Q$  pont és a  $P$  ponton átmenő  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenes távolsága:

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$



## Példa

Mennyi a  $Q(-3, 4, -3)$  pont és az  $e: x = 1 - 4t, y = 2, z = 3t$  egyenes távolsága?

## Megoldás

$$P(1, 2, 0), \overrightarrow{PQ} = (-3 - 1, 4 - 2, -3 - 0) = (-4, 2, -3),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 24, 8)$$

$$|(6, 24, 8)| = 26, \text{ így}$$

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(6, 24, 8)|}{|(-4, 0, 3)|} = \frac{26}{5}.$$

## Definíció

Egy  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  vektort az  $S$  sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

## Tétel (Sík explicit egyenletei)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó ( $\mathbf{r}_0$  helyvektorú), az  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektorok által kifeszített sík

explicit vektoregyenlete:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$

explicit egyenletrendszer:  $x = x_0 + su_1 + tv_1$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3$$

## Tétel (Sík implicit egyenletei)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  ( $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ) normálvektorú sík

vektoregyenlete:  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$

alapegyenlete:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete:  $Ax + By + Cz = D,$

normálegyenlete:  $\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$

ahol  $P(x, y, z)$  a sík egy tetszőleges pontja, és  $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$

Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

## Példa (Sík egyenletének felírása)

$$P_0(1, -2, 3), \mathbf{u} = (3, 0, 2), \mathbf{v} = (1, -3, 0).$$

## Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$$

$$x = 1 + 3s + t$$

$$y = -2 - 3t$$

$$z = 3 + 2s$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6, 2, -9).$$

vektoregyenlet:  $(6, 2, -9) \cdot (x - 1, y + 2, z - 3) = 0,$

alapegyenlet:  $6(x - 1) + 2(y + 2) - 9(z - 3) = 0,$

általános egyenlet:  $6x + 2y - 9z = -25,$

normálegyenlet:  $\frac{6x + 2y - 9z + 25}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{6}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{9}{11}z + \frac{25}{11} = 0.$

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 2, 0)$ ,  $R(0, 0, 3)$ .

Megoldás

Az explicit egyenletrendszerhez  $\vec{PQ} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{PR} = (-1, 0, 3)$ :

$$x = 1 - s - t$$

$$y = +2s$$

$$z = +3t$$

A normálvektor

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 3, 2),$$

így az alapegyenlet  $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ , az általános egyenlet  $6x + 3y + 2z = 6$ , a normálegyenlet  $\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{6}{7} = 0$ .

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

$$S_1: 2x + z = 3, \quad S_2: 3y + z = 5$$

Megoldás

$$S_1 \text{ normálvektora: } (2, 0, 1),$$

$$S_2 \text{ normálvektora: } (0, 3, 1),$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például  $x = -1$ , ekkor  $z = 5$  és  $y = 0$ . Az egyenes egyenletrendszere:  $x = -1 - 3t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 5 + 6t$ .

Fordított irány: egyenes egyenletrendszeréből megadni két sík egyenletét, melyeknek épp ez az egyenes a metszésvonala.

Az egyenes explicit egyenletrendszeréből a  $t$  paramétert kiküszöböljük:

$$\begin{array}{l}
 x = x_0 + at \\
 y = y_0 + bt \\
 z = z_0 + ct
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 bx = bx_0 + abt \\
 ay = ay_0 + abt \\
 cx = cx_0 + act \\
 az = az_0 + act
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{a \neq 0} \\
 \Rightarrow \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 bx - ay = bx_0 - ay_0 \\
 cx - az = cx_0 - az_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 b=0, c=0 \\
 \implies
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 y = y_0 \\
 z = z_0
 \end{array}$$

### Definíció (Egyenesek implicit egyenletrendszere)

Egyenes *implicit egyenletrendszerén* két olyan sík egyenletét értjük, melyek nem párhuzamosak, így metszésvonaluk egy egyenes.

### Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

$$S: x + 2y + 2z = 3, \quad e: x = 3 - t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 1.$$

### Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.

Az egyenes egy pontja:  $(3 - t, 2 + 2t, 1)$ , behelyettesítve:

$(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$ , azaz  $t = -2$ . Innen a közös pont:

$(5, -2, 1)$ . Ellenőrzés!



## Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0, -1, 1)$ ,  $S: x + 2y + 2z = 3$  (normálegyenlete:  $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$ ).

## Megoldás

Legyen  $P$  az  $S$  sík egy tetszőleges pontja, ekkor  $Q$  és  $S$  távolsága:

$$\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|$$

ahol  $\mathbf{n}$  az  $S$  sík egy normálvektora. Esetünkben legyen  $P(-1, 1, 1)$ . Így

$$\left| (1, -2, 0) \cdot \frac{(1, 2, 2)}{3} \right| = |-1| = 1.$$

A feladat mindig megoldható úgy, hogy a  $Q$  pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába. A kapott érték épp a távolság. (Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.)

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 1 - 1 = -1.$$

## Amit hibátlanul tudni kell!

- 1 egyenes explicit vektoregyenlete, és explicit egyenletrendszere
- 2 egy ponton átmenő, adott irányú egyenes
- 3 két ponton átmenő egyenes
- 4 szakasz paraméterezése
- 5 sík explicit vektoregyenlete, és explicit egyenletrendszere
- 6 sík implicit egyenletei: vektor-, alap-, általános és normálegyenlete
- 7 egy ponton átmenő, adott normálvektorú sík általános egyenletének felírása
- 8 három ponton átmenő sík általános egyenletének felírása
- 9 sík és egyenes metszéspontja