A derivált alkalmazásai

Összeállította: Wettl Ferenc

2014. november 17.

D Az f függvénynek a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban abszolút (globális) maximuma [abszolút minimuma] van, ha minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad [f(x) \geqslant f(c)]$$

extrémum: maximum vagy minimum

T Szélsőértéktétel (Weierstrass-tétel) Ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor van minimuma és maximuma, azaz létezik olyan $c, d \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén

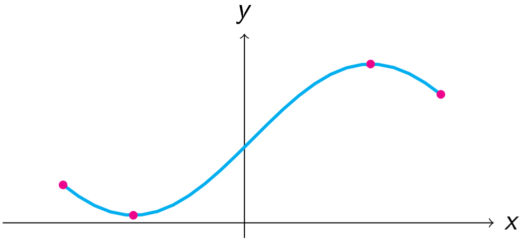
$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$$

K Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor értékkészlete is korlátos zárt intervallum.

D Az f függvénynek a $\mathcal{D}_f$ valamely c belső pontjában lokális maximuma [lokális minimuma] van, ha van olyan c-t tartalmazó nyílt intervallum, mely része $\mathcal{D}_f$-nek, és amelynek minden x elemére

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad [f(x) \geqslant f(c)]$$

D Ha c az értelmezési tartomány egy intervallumának végpontja, akkor f-nek lokális szélsőértéke van c-ben, ha a fenti egyenlőtlenségek valamelyike fennáll egy c-t is tartalmazó félig nyílt intervallum minden x elemére.



T Ha f-nek c-ben lokális szélsőértéke van, és f diffható c-ben, akkor $f'(c) = 0$.

B TFH f-nek lokális maximuma van c-ben. Ekkor

$$f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$
$$f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

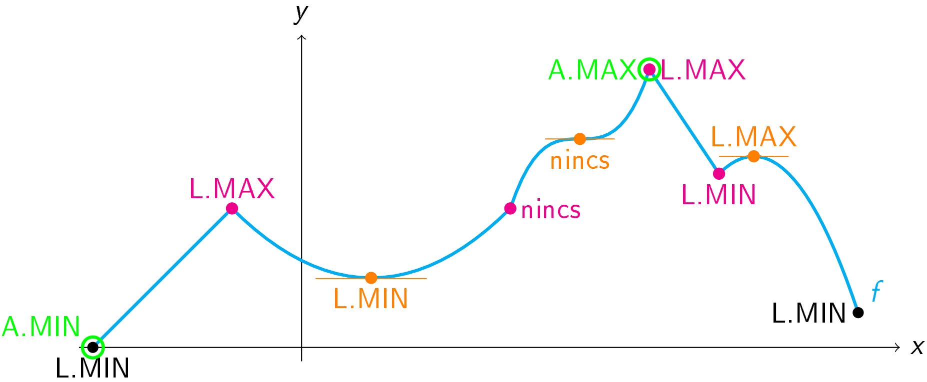
Így $f'(c) = 0$. Minimumhelyre a bizonyítás hasonló.

D A $c \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény kritikus pontja, ha f'

- vagy nem létezik c-ben,
- vagy $f'(c) = 0$.

K f-nek globális szélsőértéke lehet

- a kritikus pontokban
- az intervallum végpontjaiban



- kritikus pont: f nem differenciálható
- kritikus pont: f deriváltja 0
- intervallum végpontja
- abszolút (globális) szélsőérték

P Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + 2/3x$ függvény lokális és abszolút szélsőértékhelyeit a $[-2, 1]$ intervallumon!

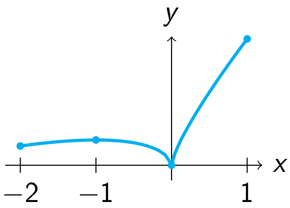
M $f'(x) = 2/3x^{-1/3} + 2/3$.

E függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, tehát itt f nem diffható.

$f'(x) = 2/3x^{-1/3} + 2/3 = 0 \rightsquigarrow x = -1$

A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$, a végpontok $x = -2$, $x = 1$.

$f(-2) = \sqrt[3]{4} - 4/3 \approx 0.254$, $f(-1) = 1/3$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5/3$.



L.MAX: $x = -1$, $x = 1$, L.MIN: $x = -2$, $x = 0$ helyeken.

A.MAX: $5/3$ ($x = 1$-ben), A.MIN: 0 (0-ban)

T Rolle-tétel: Ha

- f folytonos $[a, b]$-n,
- f diffható (a, b)-n,
- $f(a) = f(b)$,

akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy

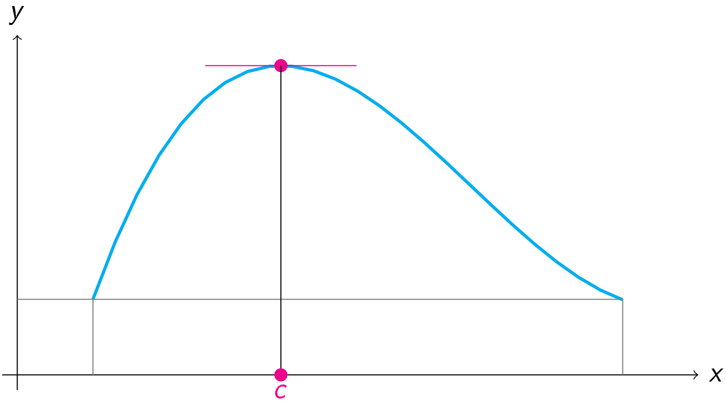
$$f'(c) = 0.$$

B f folytonos $[a, b]$-n, ezért van abszolút maximuma és minimuma. Mivel f diffható (a, b)-n, ezért ezeket értékként

- vagy a végpontokban
- vagy olyan c belső pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$.

Ha f a minimum és a maximum legalább egyikét (a, b)-ben veszi fel, akkor $f'(c) = 0$, kész.

Ha a maximumot és a minimumot is a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény csak a konstans függvény lehet, így mindenütt 0 a derivált.


y
x
c

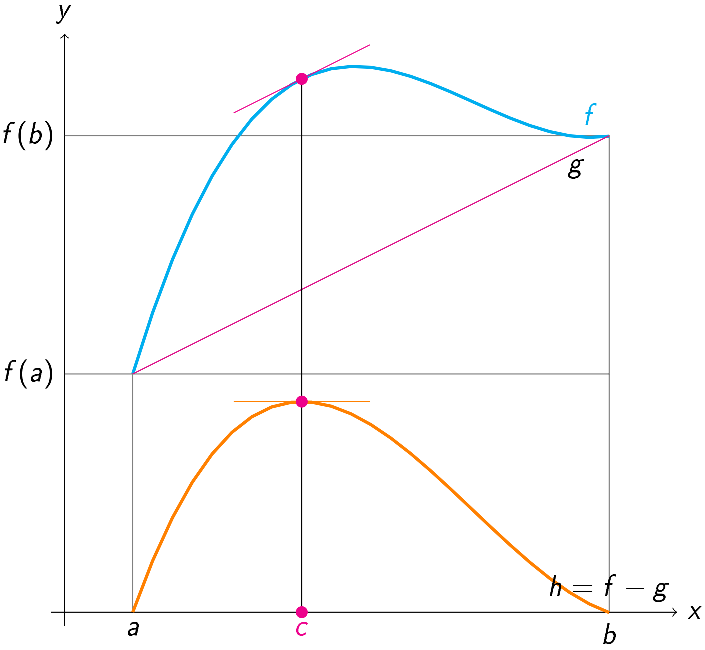
P Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x + 1$ függvénynek csak egyetlen valós gyöke van.

M $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3 > 0.$

f minden valós helyen differenciálható (és így folytonos is).

Ha volna f-nek két zérushelye, közte valahol 0 lenne a derivált, tehát legföljebb csak egy zérushelye lehet.

f folytonos és $f(-1) = -7$, $f(1) = 9$, tehát Bolzano tétele szerint a $(-1, 1)$ intervallumon f-nek zérushelye van.



y
f(b)
f(a)
f
g
h = f − g
x
a
c
b

T Lagrange-tétel: Ha

- f folytonos $[a, b]$-n,
- f diffható (a, b)-n,

akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

B Legyen g az a függvény, melynek grafikonja az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontok közti szelőegyenes:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alkalmazzuk a $h = f - g$ függvényre a Rolle-tételt:

- $h(a) = h(b) = 0$,
- $h'(x) = \left(f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$,
- van olyan $c \in (a, b)$, ahol $h'(c) = 0$:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \qquad \text{QED}$$

M Fizikai következmény: ha egy útszakaszon átlagosan 60 km/h sebességgel haladtunk, akkor legalább egyszer mentünk épp 60-nal.

K Ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f'(x) = 0$, akkor f konstans az (a, b) intervallumon (valamely C számra $f(x) = C$).

B Kontrapozícióval bizonyítunk: ha f nem konstans, akkor nem lehet a deriváltja mindenütt 0.

Ha f nem konstans, van olyan két $p, q \in (a, b)$, hogy $f(p) \neq f(q)$.

Ekkor van olyan $c \in (p, q)$, hogy

$$f'(c) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \neq 0,$$

tehát $c \in (a, b)$ helyen $f'(c) \neq 0$.

K Ha $f' = g'$ az (a, b) intervallumon, akkor van olyan C szám, hogy az (a, b) intervallumon $f = g + C$, azaz $f - g$ konstans.

B A $h = f - g$ függvény deriváltja $h' = f' - g' = 0$, így $h = C$, azaz $f = g + C$.

P Melyik az a függvény, amelyiknek cos a deriváltja?

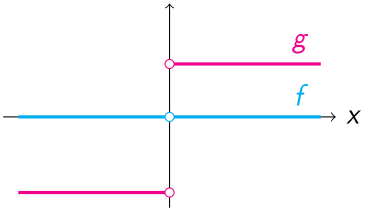
M Minden $\sin + C$ alakú függvény, ahol C tetszőleges konstans.

P Legyen $f(x) = 0$, ha $x \neq 0$, de f ne legyen értelmezve a 0 helyen. Mely függvények deriváltja f?

M $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, azaz f értelmezési tartománya nem intervallum! A megoldás: $g' = f$, ha

$$g(x) = \begin{cases} C_1, & \text{ha } x > 0, \\ C_2, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ahol C_1 és C_2 két tetszőleges konstans.



T Cauchy-féle középértéktétel: Ha

- f és g folytonos $[a,b]$-n,
- f és g diffható (a,b)-n,
- g'-nek nincs zérushelye (a,b)-n,

akkor van olyan $c \in (a,b)$, hogy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

B Megmutatjuk, hogy $g(a) \neq g(b)$. Egyébként a Rolle-tétel szerint létezne olyan $c \in (a,b)$, hogy $g'(c) = 0$, de ezt a feltételek közt kizártuk.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

Alkalmazzuk a h függvényre a Rolle-tételt:

h folytonos és diffható, $h(a) = h(b) = 0$,

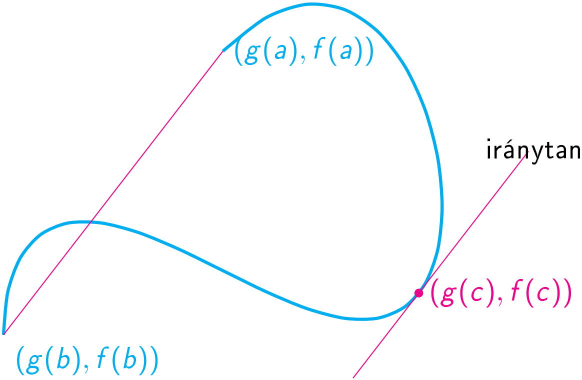
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

van olyan $c \in (a,b)$, ahol $h'(c) = 0$, és innen $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Legyen $(g(t), f(t))$ egy görbe paraméteres alakja. Deriváltja a $t = c$ helyen: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. A görbe $t = a$ és $t = b$ paraméterű pontjai $(g(a), f(a))$ és $(g(b), f(b))$. A köztük haladó húr iránytangense

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A Cauchy-tétel szerint a görbének van ezzel párhuzamos érintője:



iránytangens: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

D f szigorúan monoton növekvő [csökkenő], ha bármely $a < b$ ($a, b \in \mathcal{D}_f$) esetén $f(a) < f(b)$ [$f(a) > f(b)$]. (A Thomas-könyv ezt nevezi monoton növekvőnek [csökkenőnek].)

f monoton növekvő [csökkenő], ha bármely $a < b$ ($a, b \in \mathcal{D}_f$) esetén $f(a) \leqslant f(b)$ [$f(a) \geqslant f(b)$].

T TFH f folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n.

- Ha $f' > 0$ az (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton növekvő $[a, b]$-n.
- Ha $f' < 0$ az (a, b)-n, akkor f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$-n.

B Legyen $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra: van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$x_2 - x_1 > 0$, ezért ha $f'(c) > 0$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton növekvő, ha $f'(c) < 0$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő.

M Az állítás megfordítása nem igaz, csak annyi, hogy ha f szigorúan monoton növekvő [csökkenő] $[a, b]$-n, akkor $f' \geqslant 0$ $[f' \leqslant 0]$ az (a, b) intervallumon.

Például az $f : x \mapsto x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő, de 0-ban a deriváltja 0, azaz $f' > 0$ nem teljesül minden pontban.

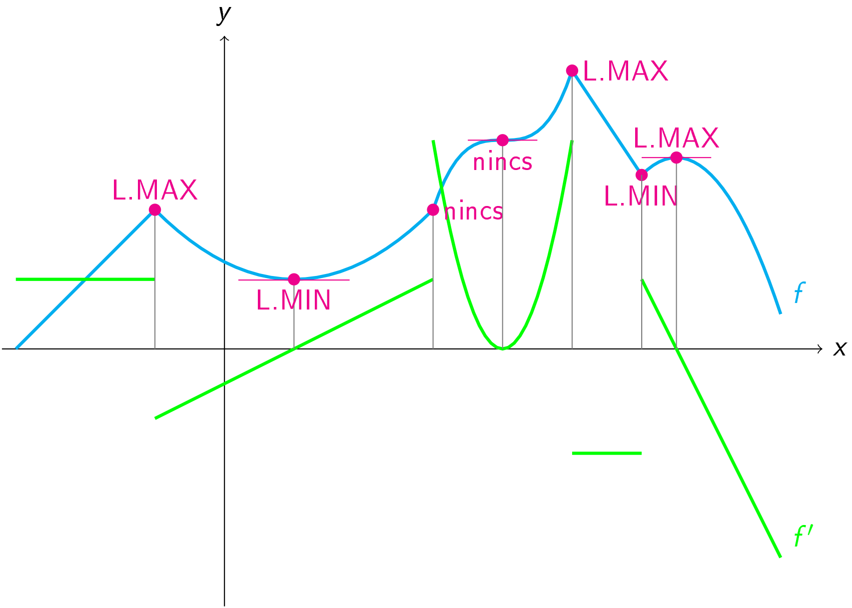
Á Ha f monoton növekvő $[a, b]$-n, akkor $f' \geqslant 0$ az (a, b)-n.

T TFH f folytonos az (a, b)-n és diffható az (a, c) és (c, b) intervallumokon és c az f kritikus pontja.

- Ha f' az (a, c)-n pozitív, a (c, b)-n negatív, akkor c-ben maximuma van.
- Ha f' az (a, c)-n negatív, a (c, b)-n pozitív, akkor c-ben minimuma van.
- Ha f' azonos előjelű az (a, c) és (c, b) intervallumokon, akkor nincs szélsőértéke c-ben.

B Ha f' az (a, c)-n pozitív, akkor minden $x \in (a, c)$ elemre $f(x) < f(c)$. Hasonlóképp, ha f' a (c, b)-n negatív, akkor minden $x \in (c, b)$ elemre $f(x) < f(c)$. Tehát c maximumhely.

A másik két állítás hasonlóan bizonyítható.


y
x
L.MAX
L.MIN
nincs
nincs
L.MAX
L.MAX
L.MIN
f
f'

P Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + 2/3x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

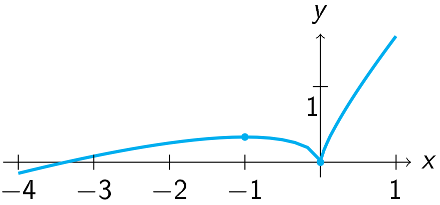
M $f'(x) = 2/3x^{-1/3} + 2/3$.

E függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, tehát itt f nem diffható.

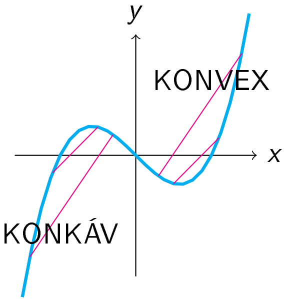
$f'(x) = 2/3x^{-1/3} + 2/3 = 0 \rightsquigarrow x = -1$

A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	NÉ	$+$
f	$\nearrow$	MAX ($1/3$)	$\searrow$	MIN (0)	$\nearrow$

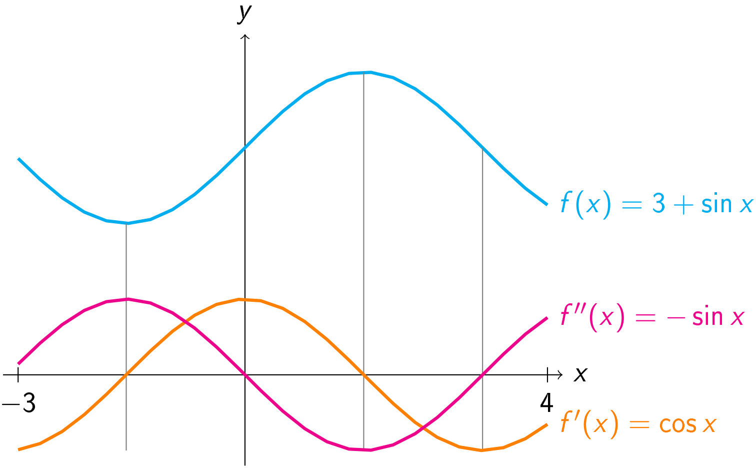


D Az I itervallumon értelmezett f függvény konvex [konkáv], ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő húr, a grafikon fölött [alatt] halad (beleértve, hogy a két grafikon egybeesik).

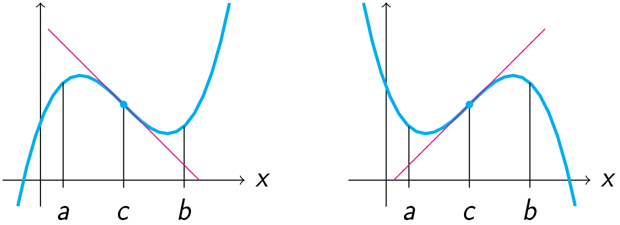


T Ha az I itervallumon értelmezett f függvény diffható, és f' monoton növekvő [csökkenő] I-n, akkor f konvex [konkáv].

T Ha az I itervallumon értelmezett f függvény kétszer diffható, és $f'' > 0$ $[f'' < 0]$ az I-n, akkor f konvex [konkáv] az I-n.


y
x
−3
4
f(x) = 3 + sin x
f″(x) = − sin x
f′(x) = cos x

D Ha f értelmezve (a, b)-n, diffható a $c \in (a, b)$ helyen, és f grafikonja (a, c)-n a c-beli érintő fölött, (c, b)-n az alatt van, vagy fordítva, akkor AMH f-nek a c-ben inflexiós pontja van.



T Ha f az (a, c)-n konvex, a (c, b)-n konkáv, vagy fordítva, és c-ben diffható, akkor ott inflexiós pontja van.

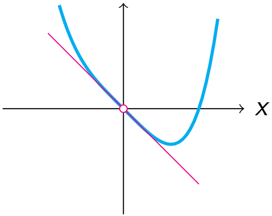
T Ha f diffható (a, b)-n, és f' az (a, c)-n szigorúan monoton növekvő, (c, b)-n szigorúan monoton csökkenő, vagy fordítva, akkor f-nek c-ben inflexiós pontja van.

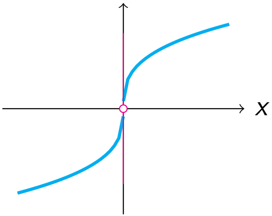
T Ha f kétszer diffható (a, b)-n, és c-ben f-nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c) = 0$.

Azaz az $f''(c) = 0$ szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy

P (Ahol a második derivált 0, nem biztos, hogy inflexiós pont van) Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - x$ függvény konvex és konkáv tartományait és inflexiós pontjait!

M $f'(x) = 4x^3 - 1$, $f''(x) = 12x^2$.
Bár $f''(0) = 0$, itt nincs inflexiós pontja f-nek, mert f'' előtte és utána is pozitív, azaz az f előtte és utána is konvex (így az egész számegyenesen konvex).





P (Inflexiós pont lehet ott, ahol f'' nincs értelmezve) Az $f(x) = x^{1/3}$ függvénynek a 0 helyen inflexiós pontja van, de itt f'' nincs értelmezve:

$$f''(x) = (x^{\frac{1}{3}})'' = (\frac{1}{3}x^{-2/3})' = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

T Második derivált és a lokális szélsőérték: TFH f'' folytonos a c pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

- $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0 \Rightarrow f$-nek c-ben lokális minimuma van.
- $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0 \Rightarrow f$-nek c-ben lokális maximuma van.
- $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

B Ha $f''(c) > 0$, akkor f'' folytonossága miatt c egy környezetében $f''(x) > 0$, így f' szigorúan monoton növekvő

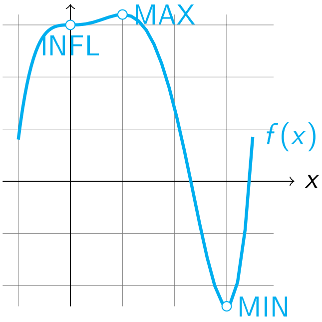
$\rightsquigarrow f'(c) = 0$, így $f'(x)$ előjele $x < c$ esetén negatív, $x > c$ esetén pozitív

$\rightsquigarrow f$-nek c-ben minimuma van.

K Ha f''' folytonos a c pontot tartalmazó nyílt intervallumon, $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, akkor f-nek c-ben inflexiós pontja van.

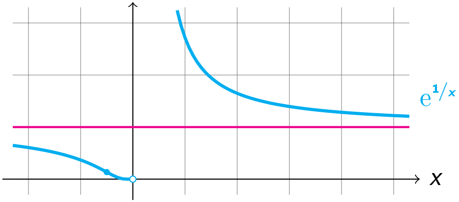
P Keressük meg az $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 3$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

M $f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$, ezek zérushelyei: $x_{12} = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.
Függvényértékek a kritikus pontokban: $f(0) = 3$, $f(1) = 3.2$, $f(3) = -2.4$.
$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x$,
$f''(0) = 0$???, $f''(1) = -2$ MAX, $f''(3) = 18$ MIN
$f'''(x) = 12x^2 - 24x + 6$, $f'''(0) \neq 0$ INFL



1. f értelmezési tartománya, szimmetriája (páros/páratlan), periódikussága
2. f', f'' (esetleg f''') meghatározása
3. kritikus pontok (f'-ből)
4. monoton tartományok, szélsőértékhelyek
5. konvexitás, inflexiós pontok
6. aszimptoták
7. függvényértékek kiszámítása (a fenti kiszámolt pontokban, $x = 0$-ban, zérushelyek,...)
8. grafikon megrajzolása

P Végezzünk függvényvizsgálatot az $\mathrm{e}^{1/x}$ függvényen!

M
1. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (nem páros, nem páratlan, nem periodikus)
2. $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3} + \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}$
3. nincs kritikus pont
4. $f' < 0$ mindenütt, f mindenütt szigorúan monoton csökkenő,
5. $f''(x) = 0$ az $x = -1/2$ helyen, f'' előtte negatív (f konkáv), utána pozitív (f konvex), tehát f-nek $x = -1/2$-ben inflexiós pontja van
6. $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{e}^{1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{1/x} = \infty$, $\rightsquigarrow$ $x = 0$ függőleges aszimptota
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1/x} = 1 \rightsquigarrow y = 1$ vízszintes aszimptota
7. $f(-1/2) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0.135$, $f(1) = \mathrm{e}$
8. 

M Ha az f és g függvény határértékét ismerjük, nem mindig tudjuk meghatározni pl. az $f \pm g$, fg, $f^g, \ldots$ határértékeket.

M Határozatlan alakok: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0

$\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{x} = a$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$,

$\frac{\infty}{\infty}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = 0$,

$0 \cdot \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot 3x = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 1$,

∞-∞ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$,

1^∞ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{k}{x})^x = \mathrm{e}^k$,

0^0 $\lim\limits_{x\to 0+} x^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} 0^x = 0$,

∞^0 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}$,

T L'Hôpital-szabály (első alak) Ha $f(a) = g(a) = 0$, létezik $f'(a)$ és $g'(a)$ és $g'(a) \neq 0$, akkor

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

B

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

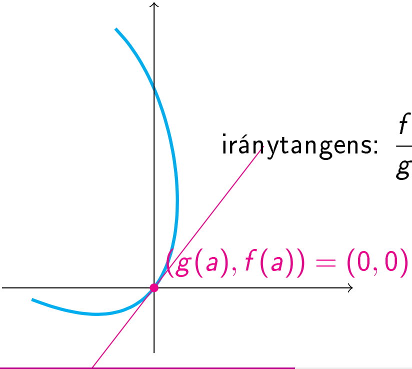
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

P $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{1}\right|_0 = \frac{1}{4}.$

P $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left.\frac{\cos x}{1}\right|_0 = 1.$

Geometriai szemléltetés

Legyen $(g(x), f(x))$ egy görbe paraméteres alakja, mely áthalad az origón. Legyen az origó az a paraméterhez tartozó pont, azaz $f(a) = g(a) = 0$. E pontban az érintő iránytangense egyrészt $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$, másrészt a szelők határhelyzete, azaz $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.



iránytangens: $\dfrac{f'(a)}{g'(a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

T **L'Hôpital-szabály (erősebb alak)** Legyen f és g két olyan valós függvény,

- melyek differenciálhatók egy I nyílt intervallumon, kivéve esetleg annak egy a pontját,
- $g'(x) \neq 0$, ha $x \neq a$ és $x \in I$,
- $\lim_a f = \lim_a g = 0$ vagy $\lim_a f = \lim_a g = \infty$.
- létezik az $L = \lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$ határérték.

Ekkor

$$\lim_{a} \frac{f}{g} = L,$$

ahol a és L lehet ∞, $-\infty$ vagy tetszőleges valós. A tétel féloldali határértékekre is igaz.

M Azt állítja a tétel, hogy $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$,feltéve, hogy a jobb oldali határérték létezik!

M Ne keverjük össze, a jobb oldalon álló határérték nem a hányados deriváltja, azaz $\frac{f'}{g'} \neq \left(\frac{f}{g}\right)'$!

B Az $x \to a^+$, $f(a) = g(a) = 0$ esetet igazoljuk.

Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumra: létezik olyan $c \in (a, x)$, hogy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Mivel $f(a) = g(a) = 0$, ezért

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ha $x \to a^+$, akkor $c \to a^+$ is fönnáll:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Példák

P $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{y^{1-x}-1}{1-x}$

M $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{y^{1-x}-1}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-y^{1-x}\ln y}{-1} = \ln y.$

P $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1+\ln x - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x + x\ln x - 1}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x}{1+1+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x}{2+\ln x}$$

$$= \frac{1}{2},$$

P $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{c^x - 1}{x}$

M $$= \lim_{x\to 0} \frac{c^x \ln c}{1} = \ln c.$$

P $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$

M $$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{\cos x} = \frac{-2+8}{1} = 6.$$

M Aszimptotikusan: log < hatvány, polinom < exp függvény.

P Legyen $k > 0$, ekkor $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^k} = 0$.

M
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{k}x^{-k} = 0.$$

P $n > 0$ egész, ekkor $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$.

M
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\mathrm{e}^x} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^x}$$

P $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$

M $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}}$$
$$= \mathrm{e}$$

P $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k \ (k \in \mathbf{R})$

M $k = 0$ esetén $1^x \to \mathrm{e}^0 = 1$, trivi.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k$$
$$= \lim_{\frac{k}{x}\to 0}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k$$
$$= \mathrm{e}^k.$$

P $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

M
$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x \\ &= 0. \end{aligned}$$

A L'Hôpital-szabály hibás alkalmazásai

1. csak határozatlan alakokra használható ($0/0$, ∞/∞)

P $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$, miközben $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+x} = \frac{0}{1} = 0$.

2. Fontos, hogy létezzen az
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
határérték!

P $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$. A bal oldal határértéke 1, míg a jobb oldalnak nem léztezik határértéke!

	Feltételek		Átalakítás
	$\lim_a f$	$\lim_a g$	
$\frac{0}{0}$	0	0	
$\frac{\infty}{\infty}$	∞	∞	$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{1/g}{1/f}$
$0 \cdot \infty$	0	∞	$\lim_a fg = \lim_a \frac{f}{1/g}$
$\infty - \infty$	∞	∞	$\lim_a (f - g) = \lim_a \frac{1/g - 1/f}{1/(fg)}$
1^∞	1	∞	
0^0	0^+	0	$\lim_a f^g = \mathrm{e}^{\lim_a g \ln f} = \mathrm{e}^{\lim_a \frac{\ln f}{1/g}}$
∞^0	∞	0	

Amit tudni kell

- szélsőértéktétel (Weierdtarass)
- lokális szélsőérték és a derivált 0 voltának kapcsolata
- Rolle és Lagrange-féle középértéktétel és az utóbbi két következménye
- szigorú monotonitás és a derivált kapcsolata
- a derivált előjelváltása és a szélsőérték kapcsolata
- f konvexitása és f' szigorú monotonitásának kapcsolata
- f konvexitása és f'' előjele közti kapcsolat
- inflexiós pont lézetése és f'' nulla volta közti kapcsolat
- második derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata
- határozatlan alakok
- L'Hospital-szabály
- log, hatvány, polinom, exp függvények aszimptotikus viselkedése