

Differenciálhatóság

Összeállította: Wetti Ferenc

2014. december 5.

- 1 A differenciálhatóság fogalma
 - Pontbeli differenciálhatóság
 - Jobb és bal oldali differenciálhatóság
 - Deriváltfüggvény
 - Egy pontban nem diffható függvények
 - Folytonosság és diffhatóság
- 2 Differenciálási szabályok
 - Összeg, szorzat, hányados
 - Néhány függvény deriváltja
 - Összetett függvény differenciálása
 - Paraméteresen adott görbék
 - Implicit függvény deriváltja
 - Függvény inverze
 - Inverz függvény deriváltja
 - Lineáris közelítés
 - Differenciál
- 3 Összefoglalás

- 1 A differenciálhatóság fogalma
 - Pontbeli differenciálhatóság
 - Jobb és bal oldali differenciálhatóság
 - Deriváltfüggvény
 - Egy pontban nem diffható függvények
 - Folytonosság és diffhatóság

- 2 Differenciálási szabályok
 - Összeg, szorzat, hányados
 - Néhány függvény deriváltja
 - Összetett függvény differenciálása
 - Paraméteresen adott görbék
 - Implicit függvény deriváltja
 - Függvény inverze
 - Inverz függvény deriváltja
 - Lineáris közelítés
 - Differenciál

- 3 Összefoglalás

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Definíció (Differenciálhatóság)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban **differenciálható**, ha létezik az

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

határérték. Az m számot az f c -beli **differenciálhányadosának**, c -beli **deriváltjának** nevezzük.

Az f grafikonja $(c, f(c))$ pontbeli **érintője meredekségét** is a fenti határértékkel definiáljuk.

Definíció (Differenciálhatóság – ekvivalens definíció)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban **differenciálható**, ha létezik az

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték.

Állítás

Ha az f függvény differenciálható a c pontban, differenciálhányadosa itt m , akkor érintőjének egyenlete

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Példa

Írjuk fel az $f : x \mapsto x^2$ függvény $(1, 1)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

Megoldás

Az érintő meredeksége (iránytangense)

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Így az érintő egyenlete:

$$y = 1 + 2(x - 1), \text{ azaz } y = 2x - 1.$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- **Jobb és bal oldali differenciálhatóság**
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Értelemszerűen módosítjuk a definíciót a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- **Deriváltfüggvény**
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Definíció

Az f deriváltfüggvénye az

$$f' : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

függvény, mely f diffhatósági helyein van értelmezve.

Definíció

f differenciálható (deriválható) egy nyílt intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható.

f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, ha (a, b) minden pontjában diffható, továbbá a -ban létezik a jobb, b -ben a bal oldali differenciálhányadosa, azaz léteznek a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

határértékek.

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = Df = D(f), f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx} = Df(x) = D(f)(x)$$

Helyettesítési értékük a c helyen:

$$f'(c) = Df(c) = D(f)(c), \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=c} = \left. \frac{df}{dx} \right|_c = \left. \frac{d}{dx}f(x) \right|_{x=c} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c}$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Példa

Az $x \mapsto |x|$ a 0-ban nem diffható (minden más helyen igen).

Megoldás

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

tehát a függvény nem diffható.

Példa

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ a 0-ban nem diffható (minden $x > 0$ esetén igen).

Megoldás

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

nincs véges határérték, a függvény nem diffható.

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Tétel (Diffható függvény folytonos)

Ha f diffható c -ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy ha $\exists f'(c)$, akkor $\lim_c f = f(c)$, azaz $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$. $h \neq 0$ esetén

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} h.$$

Ha $h \rightarrow 0$, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h = f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c).$$

Tétel (Darboux-tétel (a derivált Bolzano-tétele))

Ha a és b olyan intervallum pontjai, melyeken f diffható, akkor f' az $f'(a)$ és $f'(b)$ között minden értéket fölvesz.

- 1 A differenciálhatóság fogalma
 - Pontbeli differenciálhatóság
 - Jobb és bal oldali differenciálhatóság
 - Deriváltfüggvény
 - Egy pontban nem diffható függvények
 - Folytonosság és diffhatóság

- 2 Differenciálási szabályok
 - Összeg, szorzat, hányados
 - Néhány függvény deriváltja
 - Összetett függvény differenciálása
 - Paraméteresen adott görbék
 - Implicit függvény deriváltja
 - Függvény inverze
 - Inverz függvény deriváltja
 - Lineáris közelítés
 - Differenciál

- 3 Összefoglalás

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- **Összeg, szorzat, hányados**
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

- $(cf)' = cf'$
- $(f + g)' = f' + g'$, ahol mindkét függvény diffható,
- $(fg)' = f'g + fg'$, ahol mindkét függvény diffható,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, ahol mindkét függvény diffható és g -nek nincs zérushelye,

Néhány bizonyítás. legyen $x \in D_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} g(\xi) + f(x) \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \right) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) + \lim_{\xi \rightarrow x} f(x) \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$
- $\operatorname{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} (\xi^n)'|_x &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \dots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \dots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

• $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \\ &= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x \sin h}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

• Fölhasználtuk:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2\frac{h}{2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{h}{2} - \sin^2 \frac{h}{2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -1 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

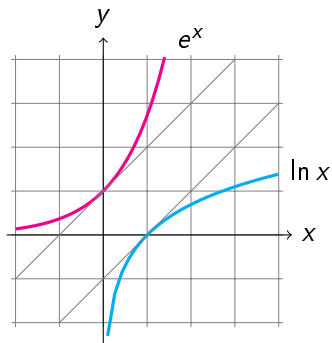
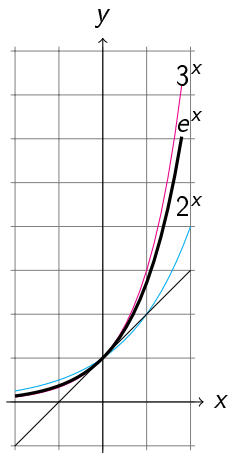
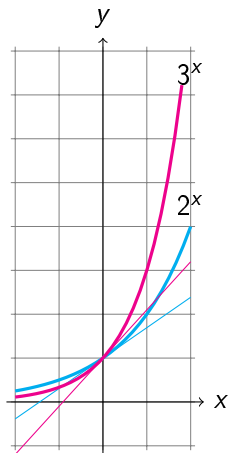
- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)

- $\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos \cos + \sin \sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

- $\operatorname{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{\cos' \sin - \cos \sin'}{\sin^2} = \frac{-\sin \sin - \cos \cos}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2}$$



Definíció

Legyen e az a szám, melyre az $x \mapsto e^x$ függvény deriváltja a 0-ban 1, azaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

- Egyéb összefüggések:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &\approx 2.718281828459045 \dots \end{aligned}$$

Következmény

$$(e^x)' = e^x$$

- $$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x\end{aligned}$$

Jelölés

$$\ln x = \log_e x$$

Megjegyzés

deriváltja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, csak később tárgyaljuk.

Következmény

$$(a^x)' = a^x \ln a, \text{ ahol } a > 0.$$

- $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$
 $(e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a.$

M $\ln 1 = 0, \ln 2 \approx 0.693147, \ln 3 \approx 1.098612.$

P $(2^{x^2})'$
 $(2^{x^2})' = 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x = \ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2+1}$

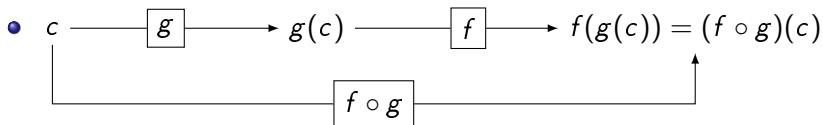
1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- **Összetett függvény differenciálása**
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás



$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y = f(u), u = g(x), \text{ jelölésekkel: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

• $(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$y = f(u), u = g(w), w = h(x) \text{ jelölésekkel: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: \sin

- $\sin(x^2)$

külső függvény: \sin , belső függvény: $x \mapsto x^2$

- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$

- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x^3)'$ =? (legyen $\text{id} : x \mapsto x$ az identikus leképezés)

külső függvény: $x \mapsto x^2$, középső: \sin , belső függvény: $x \mapsto x^3$
(zavaró lehet az x)

külső függvény: id^2 , középső: \sin , belső függvény: id^3

$$2 \sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 6x^2 \sin x^3 \cos x^3$$

D Jelölje sfn azt a szinusz-függvényt, melynek argumentuma nem radiánban, hanem fokban van megadva, cõs a hasonló coszinusz-függvényt.

$$\text{sfn } x = \sin \frac{\pi x}{180}$$

$$\text{sfn}' x = \left(\sin \frac{\pi x}{180} \right)' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \text{cõs } x$$

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Jelölés a differenciálokkal: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$

Definíció (Többváltozós függvény parciális differenciálhányadosa)

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény. Ha egyik változóját rögzítjük, a másik változója szerinti differenciálhányadosát parciális differenciálhányadosnak nevezzük:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Jelölés

$$f'_x(a, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad f''_{xx}(a, b) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$$

$$f''_{xy}(a, b) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \quad f''_{yx}(a, b) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- **Paraméteresen adott görbék**
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai:
 $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Példa

kör: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

ellipszis: $x = a \cos(t)$, $y = b \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

parabola: $x = t$, $y = t^2$, $t \in \mathbf{R}$

Példa

parabola: $x = t^2$, $y = t$, $t \in \mathbf{R}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ ha } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Példa

$$y = t^3 - t, \quad x = t^2, \quad t_0 = 1$$

Megoldás

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 1}{2t}, \text{ tehát } \left. \frac{dy}{dx} \right|_1 = 1.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \text{ ha } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Megoldás

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{4t^3}.$$

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- **Implicit függvény deriváltja**
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

Definíció

$F(x, y) = 0$, melyről föltesszük, hogy $F(x_0, y_0) = 0$ és az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz van olyan f függvény, hogy $y = f(x)$.

Példa

$y^2 = x^3 - x$ érintőjének meredeksége a $(2, \sqrt{6})$ ponton

Megoldás

$$2yy' = 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 1}{2y} \Rightarrow \frac{11}{2\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{6}}{12}.$$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$$

$$y' = \frac{p x^{p-1}}{q y^{q-1}}$$

$$= \frac{p x^{p-1}}{q x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

$$= \frac{p x^{p-1}}{q x^{p-\frac{p}{q}}}$$

$$= \frac{p}{q} x^{p-1-(p-\frac{p}{q})}$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

1 A differenciálhatóság fogalma

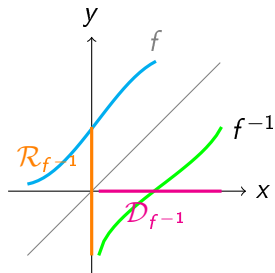
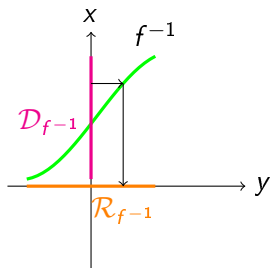
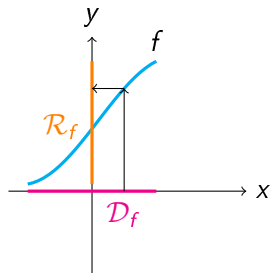
- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- **Függvény inverze**
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

- D Egy függvény **injektív** (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, **invertálható**), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.
- D ha $H \subseteq \mathcal{D}_f$, akkor f **leszűkítése/megszorítása** H -ra az a $f|_H$ -vel jelölt függvény, melynek értelmezési tartománya H , és $x \in H$ esetén $f|_H(x) = f(x)$.
- P A \sin , \cos , tg , ctg függvények nem injektívek, de a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, $\cos|_{[0, \pi]}$, $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$, $\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)}$ függvények igen!
- Á **Horizontális teszt**: f pontosan akkor **injektív**, ha grafikonja egyetlen vízszintes egyenest sem metsz egynél több pontban.



D Az injektív f függvény **inverzén** az f^{-1} -gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f.$$

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{D}_f = x \mapsto x,$$

$$f \circ f^{-1} : \mathcal{D}_{f^{-1}} \rightarrow \mathcal{D}_{f^{-1}} = y \mapsto y$$

M f^{-1} **nem tévesztendő össze** f reciprokával ($\frac{1}{f}$ -fel)! Függvény reciprokára ne használjuk a -1 kitevőt!

Van analógia: legyen $a \neq 0$ valós szám, és legyen f injektív függvény.

\cdot (számok szorzása) \leftrightarrow \circ (függvények kompozíciója)

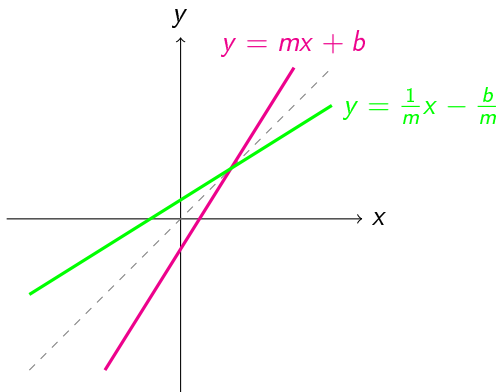
$$1 \leftrightarrow \text{id}$$

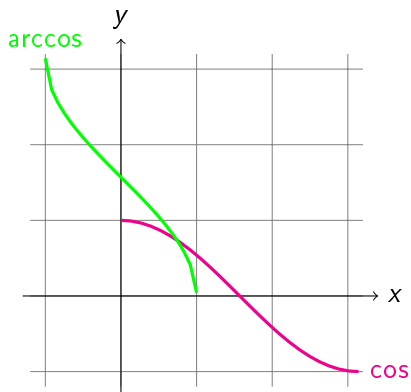
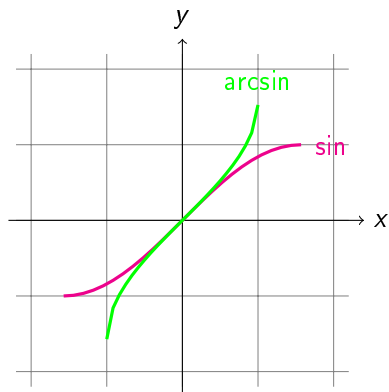
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \leftrightarrow f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f$$

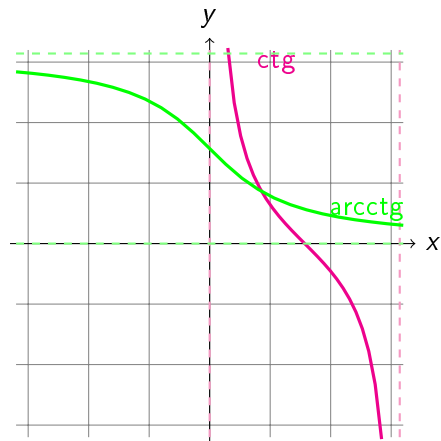
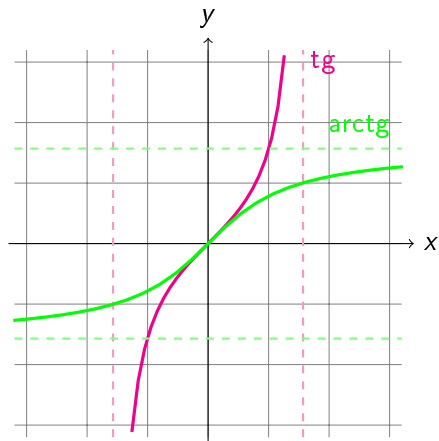
szám reciproka \leftrightarrow függvény inverze

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \leftrightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$$

- P Az $x \mapsto y = x^2$ injektív, ha $x \geq 0$. Inverze az x és y „felcserélése” után: $x = y^2$, azaz $y = \sqrt{x}$.
- P Az e^x inverze az $\ln x$ függvény.
- P Az $x \mapsto y = mx + b$ ($m \neq 0$) inverze az $x = my + b$ összefüggésből:
 $y = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$.







D A trigonometrikus függvények nem injektívek, de megszorítva egy megfelelő intervallumra igen (zárójelben az amerikai jelölések):

$$\arcsin x = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} \quad (\sin \text{ asin})$$

$$\arccos x = \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1} \quad (\cos \text{ acos})$$

$$\arctg x = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1} \quad (\tan \text{ atan})$$

$$\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)} \right)^{-1} \quad (\cot \text{ acot})$$

Á Az arkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete:

f	\arcsin	\arccos	\arctg	arcctg
\mathcal{D}_f	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
\mathcal{R}_f	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$

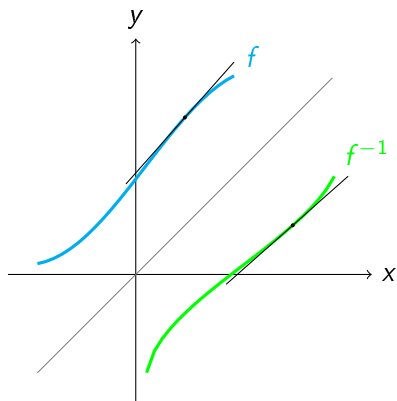
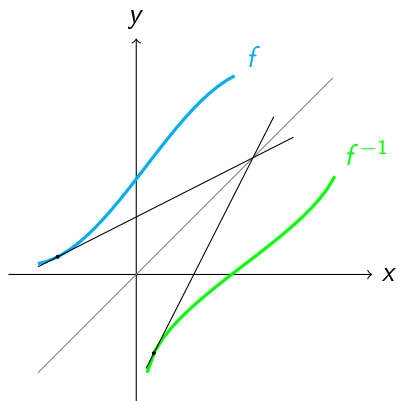
1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás



Tétel (Inverz függvény deriváltja)

Ha f diffható a $\mathcal{D}_f = I$ intervallumon, és a derivált sehol sem 0, akkor f^{-1} diffható, és

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

M Ha $a \in I$, és $b = f(a)$, akkor

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ha $y = f^{-1}(x)$, azaz $x = f(y)$, akkor

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=b} = \frac{1}{\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=a}} = \frac{1}{\left. \frac{dx}{dy} \right|_{f^{-1}(b)}}.$$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja

$$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x), \text{ innen a}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto e^y = x$:

$$(f^{-1}(x))' = \ln'(x)$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$T \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ha } x \in (-1, 1)$$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$(f^{-1}(x))' = \arcsin'(x)$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \quad \text{ugyanis } \cos \text{ pozitív } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\text{-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

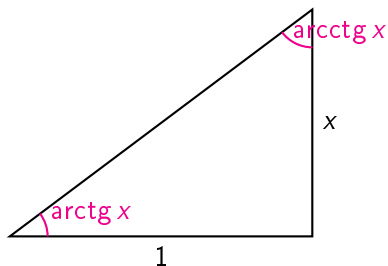
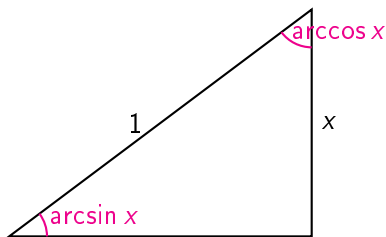
$$T \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

B ugyanis $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

Á Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjai:

f	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
f'	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathcal{D}_{f'}$	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

Á $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$



1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- **Lineáris közelítés**
- Differenciál

3 Összefoglalás

D Az a pontban diffható f függvény **linearizációja (lineáris közelítése)** az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ függvény.

P $f(x) = \sqrt{1+x}$ linearizációja az 0 pontban:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad \text{így}$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x.$$

ha x közel van 0-hoz, $\sqrt{1+x}$ közel van $1 + \frac{1}{2}x$ -hez. Jelölés:
 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

1 A differenciálhatóság fogalma

- Pontbeli differenciálhatóság
- Jobb és bal oldali differenciálhatóság
- Deriváltfüggvény
- Egy pontban nem diffható függvények
- Folytonosság és diffhatóság

2 Differenciálási szabályok

- Összeg, szorzat, hányados
- Néhány függvény deriváltja
- Összetett függvény differenciálása
- Paraméteresen adott görbék
- Implicit függvény deriváltja
- Függvény inverze
- Inverz függvény deriváltja
- Lineáris közelítés
- Differenciál

3 Összefoglalás

- D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A dx és dy változókat az f függvény x -hez tartozó **differenciáljainak** nevezzük, ha $dy = f'(x) dx$.
szokás még a $df = f'(x) dx$ jelölés is.
- P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.
- M $A(r) = r^2\pi$, így $dA = 2r\pi dr$, ami az $r = 20$ helyen $dA = 40\pi dr$, ami $dr = 0.1$ esetén $dA = 40\pi \cdot 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π -vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,

$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π .

- E jelöléssel értelmet kap a $\frac{dy}{dx}$ jelölés! Ennek egyszerű következményei:

$$d(y + z) = dy + dz,$$

$$d(cy) = c dy, \text{ ahol } c \text{ konstans}$$

$$d(yz) = dy \cdot z + y \cdot dz$$

Amit hibátlanul tudni kell!

- diffhatóság definíciója, mit jelent az, hogy egy függvény nem diffható egy pontban
- diffhatóság és folytonosság kapcsolata
- differenciálási szabályok (összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvény, inverz függvény)
- hatvány és trigonometrikus függvények deriváltjai
- paraméteresen adott görbe érintőjének iránytangense
- implicit függvény deriváltja
- az e szám definíciója
- trigonometrikus függvények injektív megszorításai, inverzeik
- inverz trigonometrikus függvények és a logaritmus függvény deriváltja