Differenciálhatóság

Összeállította: Wettl Ferenc

2014. december 5.

Definíció (Differenciálhatóság)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban differencálható, ha létezik az

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

határérték. Az m számot az f c-beli differenciálhányadosának, c-beli deriváltjának nevezzük.

Az f grafikonja $(c, f(c))$ pontbeli érintője meredekségét is a fenti határértékkel definiáljuk.

Definíció (Differenciálhatóság)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban differencálható, ha létezik az

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

határérték. Az m számot az f c-beli differenciálhányadosának, c-beli deriváltjának nevezzük.

Az f grafikonja $(c, f(c))$ pontbeli érintője meredekségét is a fenti határértékkel definiáljuk.

Definíció (Differenciálhatóság – ekvivalens definíció)

A valós f függvény a $c \in \mathcal{D}_f$ pontban differencálható, ha létezik az

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték.

Állítás

Ha az f függvény differenciálható a c pontban, differenciálhányadosa itt m, akkor érintőjének egyenlete

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Állítás

Ha az f függvény differenciálható a c pontban, differenciálhányadosa itt m, akkor érintőjének egyenlete

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Példa

Írjuk fel az $f : x \mapsto x^2$ függvény $(1, 1)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

Állítás

Ha az f függvény differenciálható a c pontban, differenciálhányadosa itt m, akkor érintőjének egyenlete

$$y = f(c) + m(x - c).$$

Példa

Írjuk fel az $f : x \mapsto x^2$ függvény $(1, 1)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

Megoldás

Az érintő meredeksége (iránytangense)

$$m = \lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} == \lim_{x\to1} (x + 1) = 2.$$

Így az érintő egyenlete:

$$y = 1 + 2(x - 1), \text{ azaz } y = 2x - 1.$$

Értelemszerűen módosítjuk a definíciót a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h},$$

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \qquad \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Definíció

Az f deriváltfüggvénye az

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

függvény, mely f diffhatósági helyein van értelmezve.

Definíció

Az f deriváltfüggvénye az

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

függvény, mely f diffhatósági helyein van értelmezve.

Definíció

f differenciálható (deriválható) egy nyílt intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható.
f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon, ha (a, b) minden pontjában diffható, továbbá a-ban létezik a jobb, b-ben a bal oldali differenciálhányadosa, azaz léteznek a

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

határértékek.

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(f),$$

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(f),\ f'(x) = y'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{D}(f)(x)$$

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(f),\ f'(x) = y'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{D}(f)(x)$$

Helyettesítési értékük a c helyen:

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(f),\ f'(x) = y'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{D}(f)(x)$$

Helyettesítési értékük a c helyen:

$$f'(c) = \mathrm{D}\, f(c) = \mathrm{D}(f)(c),$$

Jelölések: Tekintsük az f függvényt, melyet $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $y = f(x)$ formákban is meg szokás adni. Jelölések a deriváltfüggvényre:

$$f' = \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(f),\ f'(x) = y'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{D}(f)(x)$$

Helyettesítési értékük a c helyen:

$$f'(c) = \mathrm{D}\, f(c) = \mathrm{D}(f)(c),\quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{c} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right|_{x=c} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c}$$

Példa

Az $x \mapsto |x|$ a 0-ban nem diffható (minden más helyen igen).

Példa

Az $x \mapsto |x|$ a 0-ban nem diffható (minden más helyen igen).

Megoldás

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

tehát a függvény nem diffható.

Példa

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ a 0-ban nem diffható (minden $x > 0$ esetén igen).

Példa

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ a 0-ban nem diffható (minden $x > 0$ esetén igen).

Megoldás

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

nincs véges határérték, a függvény nem diffható.

Tétel (Diffható függvény folytonos)

Ha f diffható c-ben, akkor ott folytonos is.

Tétel (Diffható függvény folytonos)

Ha f diffható c-ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy ha $\exists f'(c)$, akkor $\lim_c f = f(c)$, azaz $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. $h \neq 0$ esetén

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} h.$$

Ha $h \to 0$, akkor

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \lim_{h\to 0} h = f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c).$$

Tétel (Darboux-tétel (a derivált Bolzano-tétele))

Ha a és b olyan intervallum pontjai, melyeken f diffható, akkor f' az $f'(a)$ és $f'(b)$ között minden értéket fölvesz.

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

- $(cf)' = cf'$

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$, ahol mindkét függvény diffható,

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$, ahol mindkét függvény diffható,
- $(fg)' = f'g + fg'$, ahol mindkét függvény diffható,

Tétel

Legyenek f és g diffható függvények, c konstans.

- $(cf)' = cf'$
- $(f+g)' = f' + g'$, ahol mindkét függvény diffható,
- $(fg)' = f'g + fg'$, ahol mindkét függvény diffható,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, ahol mindkét függvény diffható és g-nek nincs zérushelye,

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $(fg)'(x) = \lim_{\xi \to x} \dfrac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $$(fg)'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$
  $$= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $$(fg)'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} g(\xi) + f(x) \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \right)$$

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $$(fg)'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} g(\xi) + f(x) \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \right)$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \lim_{\xi \to x} g(\xi) + \lim_{\xi \to x} f(x) \lim_{\xi \to x} \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}$$

Néhány bizonyítás. legyen $x \in \mathrm{D}_f$ az értelmezési tartomány egy rögzített eleme, ξ egy tetszőleges eleme:

- $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)g(\xi)-f(x)g(x)}{\xi-x}\\ &= \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)g(\xi)-f(x)g(\xi)+f(x)g(\xi)-f(x)g(x)}{\xi-x}\\ &= \lim_{\xi\to x}\left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}g(\xi)+f(x)\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\right)\\ &= \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\lim_{\xi\to x}g(\xi)+\lim_{\xi\to x}f(x)\lim_{\xi\to x}\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Tétel

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.
- $\sin' = \cos$

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

Tétel

- $(c)' = 0$ (konstansfüggvény deriváltja 0)
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha n egész szám.
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$
- $\mathrm{ctg}' = -\dfrac{1}{\sin^2}$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\big|_x = \lim_{\xi\to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\Big|_x = \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$

$$= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x}$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$
\begin{aligned}
(\xi^n)'\big|_x &= \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi \to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})
\end{aligned}
$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
(\xi^n)'\big|_x &= \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi \to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
(\xi^n)'\big|_x &= \lim_{\xi\to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi\to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi\to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\big|_x = \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$

$$= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x}$$

$$= \lim_{\xi \to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}.$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(x^n)' = (\frac{1}{x^m})'$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\big|_x = \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})$$
$$= nx^{n-1}.$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)'$$
$$= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2}$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\Big|_x = \lim_{\xi\to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi\to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi\to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})$$
$$= nx^{n-1}.$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(x^n)' = (\frac{1}{x^m})'$$
$$= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2}$$
$$= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$
\begin{aligned}
(\xi^n)'\big|_x &= \lim_{\xi\to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi\to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x} \\
&= \lim_{\xi\to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (\frac{1}{x^m})' \\
&= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \\
&= -mx^{-m-1}
\end{aligned}
$$

B $(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbf{N}$:

$$(\xi^n)'\big|_x = \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi - x)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})}{\xi - x}$$
$$= \lim_{\xi \to x} (\xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1})$$
$$= nx^{n-1}.$$

- $-n = m \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(x^n)' = (\frac{1}{x^m})'$$
$$= \frac{(1)' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2}$$
$$= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}}$$
$$= -mx^{-m-1}$$
$$= nx^{n-1}.$$

- $\sin'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

- $$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}$$

- $$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$
- Fölhasználtuk:

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$
- Fölhasználtuk:
  $$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$
- Fölhasználtuk:
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2\frac{h}{2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2\frac{h}{2}-\sin^2\frac{h}{2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\sin h}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$
- Fölhasználtuk:

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2\frac{h}{2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2\frac{h}{2}-\sin^2\frac{h}{2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}-\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-1\cdot 0=0.\end{aligned}$$

- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)

- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos \cos + \sin \sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)
- $\operatorname{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos\cos + \sin\sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

- $\operatorname{ctg}' = -\dfrac{1}{\sin^2}$

- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

  $$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos\cos + \sin\sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$
- $\mathrm{ctg}' = -\dfrac{1}{\sin^2}$

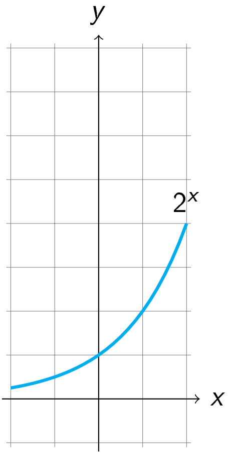
  $$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{\cos' \sin - \cos \sin'}{\sin^2} = \frac{-\sin\sin - \cos\cos}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2}$$

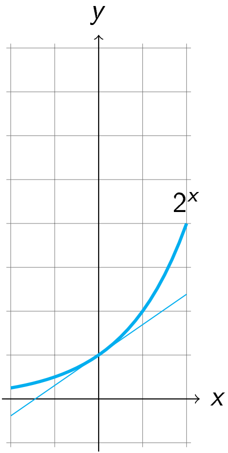
- $\cos' = -\sin$ (bizonyítás hasonlóan)
- $\mathrm{tg}' = \dfrac{1}{\cos^2}$

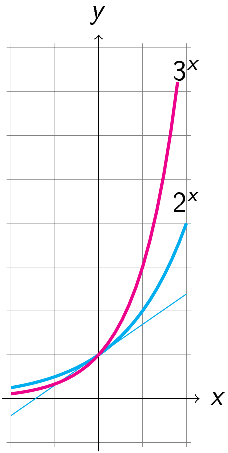
$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos\cos + \sin\sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

- $\mathrm{ctg}' = -\dfrac{1}{\sin^2}$

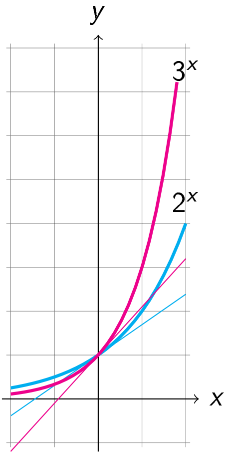
$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{\cos'\sin - \cos\sin'}{\sin^2} = \frac{-\sin\sin - \cos\cos}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2}$$

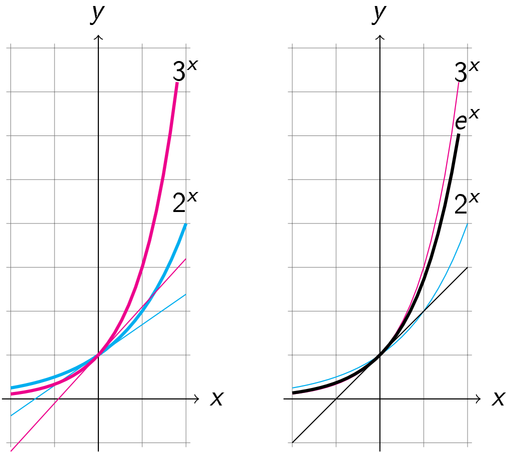

y
2^x
x

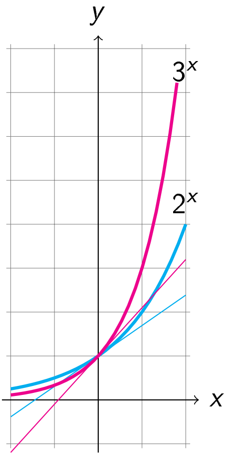

y
2^x
x

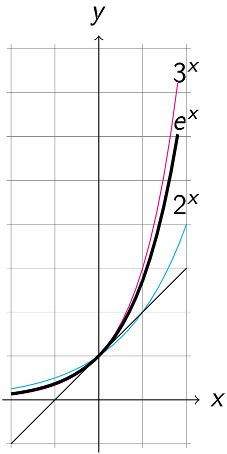


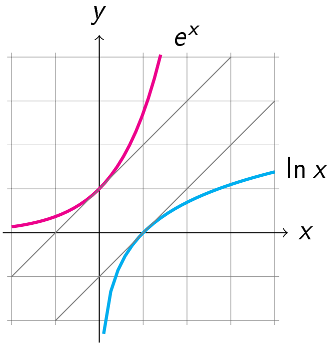
y
x
3^x
2^x


y
x
3^x
2^x


y
3^x
2^x
x
y
3^x
e^x
2^x
x


y
x
3^x
2^x


y
x
3^x
e^x
2^x


y
x
e^x
ln x

Definíció

Legyen e az a szám, melyre az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény deriváltja a 0-ban 1, azaz

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Definíció

Legyen e az a szám, melyre az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény deriváltja a 0-ban 1, azaz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

- Egyéb összefüggések:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\
&= \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&\approx 2.718281828459045\ldots
\end{aligned}$$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $(\mathrm{e}^x)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h}$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h}$$
  $$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h}$$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h} \\ &= \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h} \\ &= \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Jelölés

$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$

Következmény

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

- $$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h - 1)}{h} \\ &= \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Jelölés

$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$

Megjegyzés

deriváltja $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, csak később tárgyaljuk.

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

- $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

- $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
  $(\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a$.

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

- $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
  $(\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a$.

M $\ln 1 = 0$, $\ln 2 \approx 0.693147$, $\ln 3 \approx 1.098612$.

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

- $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
  $(\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a$.

M $\ln 1 = 0$, $\ln 2 \approx 0.693147$, $\ln 3 \approx 1.098612$.

P $(2^{x^2})'$

Következmény

$(a^x)' = a^x \ln a$, ahol $a > 0$.

- $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
  $(\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a$.

M $\ln 1 = 0$, $\ln 2 \approx 0.693147$, $\ln 3 \approx 1.098612$.

P $(2^{x^2})'$
$(2^{x^2})' = 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x = \ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2+1}$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

  $$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

  $$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

  $y = f(u)$, $u = g(x)$, jelölésekkel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(c) \arrow[r, "f"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

  $\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$

  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

  $y = f(u)$, $u = g(x)$, jelölésekkel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(c) \arrow[r, "f"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

  $$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

  $y = f(u)$, $u = g(x)$, jelölésekkel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

- $(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$

  $(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

- $$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\boxed{g}"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{f \circ g}"'] & g(c) \arrow[r, "\boxed{f}"] & f(g(c)) = (f \circ g)(c) \end{tikzcd}$$

  $$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'}$$

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

  $y = f(u)$, $u = g(x)$, jelölésekkel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

- $(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$

  $$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

  $y = f(u)$, $u = g(w)$, $w = h(x)$ jelölésekkel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} \cdot \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin

- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x^3)' =?$ (legyen $\mathrm{id} : x \mapsto x$ az identikus leképezés)

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x^3)' =?$ (legyen $\mathrm{id} : x \mapsto x$ az identikus leképezés)

külső függvény: $x \mapsto x^2$, középső: sin, belső függvény: $x \mapsto x^3$
(zavaró lehet az x)

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x^3)' =?$ (legyen $\mathrm{id} : x \mapsto x$ az identikus leképezés)

külső függvény: $x \mapsto x^2$, középső: sin, belső függvény: $x \mapsto x^3$ (zavaró lehet az x)

külső függvény: id^2, középső: sin, belső függvény: id^3

P $(\sin^2 x)'$ és $(\sin x^2)'$ deriváltja!

A fő kérdés mindig: melyik a külső függvény?

- $\sin^2 x$

  külső függvény: $x \mapsto x^2$, belső függvény: sin
- $\sin(x^2)$

  külső függvény: sin, belső függvény: $x \mapsto x^2$
- $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$

P $(\sin^2 x^3)' =?$ (legyen $\mathrm{id} : x \mapsto x$ az identikus leképezés)

külső függvény: $x \mapsto x^2$, középső: sin, belső függvény: $x \mapsto x^3$ (zavaró lehet az x)

külső függvény: id^2, középső: sin, belső függvény: id^3

$2\sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 6x^2 \sin x^3 \cos x^3$

D Jelölje sı̊n azt a szinusz-függvényt, melynek argumentuma nem radiánban, hanem fokban van megadva, co̊s a hasonló coszinusz-függvényt.

D Jelölje $\mathring{\sin}$ azt a szinusz-függvényt, melynek argumentuma nem radiánban, hanem fokban van megadva, $\mathring{\cos}$ a hasonló coszinusz-függvényt.

$\mathring{\sin}\, x = \sin \frac{\pi x}{180}$

D Jelölje $\mathring{\sin}$ azt a szinusz-függvényt, melynek argumentuma nem radiánban, hanem fokban van megadva, $\mathring{\cos}$ a hasonló coszinusz-függvényt.

$\mathring{\sin} x = \sin \frac{\pi x}{180}$

$\mathring{\sin}' x = \left(\sin \frac{\pi x}{180}\right)' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \mathring{\cos} x$

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')',$

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$,

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Jelölés a differenciálokkal: $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

Definíció (Magasabbrendű deriváltak)

$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Jelölés a differenciálokkal: $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$

Definíció (Többváltozós függvény parciális differenciálhányadosa)

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény. Ha egyik változóját rögzítjük, a másik változója szerinti differenciálhányadosát parciális differenciálhányadosnak nevezzük:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Definíció (Többváltozós függvény parciális differenciálhányadosa)

Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény. Ha egyik változóját rögzítjük, a másik változója szerinti differenciálhányadosát parciális differenciálhányadosnak nevezzük:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Jelölés

$f'_x(a, b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ $f''_{xx}(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$

$f''_{xy}(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ $f''_{yx}(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$

$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Példa

kör: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Példa

kör: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

ellipszis: $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Példa

kör: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

ellipszis: $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

parabola: $x = t$, $y = t^2$, $t \in \mathbf{R}$

Definíció

Paraméteresen megadott görbe: $x = f(t)$, $y = g(t)$, a görbe pontjai: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

Példa

kör: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

ellipszis: $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Példa

parabola: $x = t$, $y = t^2$, $t \in \mathbf{R}$

Példa

parabola: $x = t^2$, $y = t$, $t \in \mathbf{R}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Példa

$y = t^3 - t,\ x = t^2,\ t_0 = 1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Példa

$y = t^3 - t,\ x = t^2,\ t_0 = 1$

Megoldás

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3t^2 - 1}{2t}, \text{ tehát } \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_1 = 1.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y') = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Példa

$y = t^3 - t$, $x = t^2$, $t_0 = 1$

Megoldás

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3t^2 - 1}{2t}, \text{ tehát } \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_1 = 1.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y') = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ ha } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Megoldás

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3t^2 + 1}{4t^3}.$$

Definíció

$F(x, y) = 0$, melyről föltesszük, hogy $F(x_0, y_0) = 0$ és az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz van olyan f függvény, hogy $y = f(x)$.

Definíció

$F(x, y) = 0$, melyről föltesszük, hogy $F(x_0, y_0) = 0$ és az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz van olyan f függvény, hogy $y = f(x)$.

Példa

$y^2 = x^3 - x$ érintőjének meredeksége a $(2, \sqrt{6})$ pontan

Definíció

$F(x, y) = 0$, melyről föltesszük, hogy $F(x_0, y_0) = 0$ és az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében y kifejezhető x függvényeként, azaz van olyan f függvény, hogy $y = f(x)$.

Példa

$y^2 = x^3 - x$ érintőjének meredeksége a $(2, \sqrt{6})$ pontan

Megoldás

$2yy' = 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = \frac{3x^2-1}{2y} \Rightarrow \frac{11}{2\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{6}}{12}$.

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor
$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$

$y' = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$$

$$y' = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} \\ &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} \end{aligned}$$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$$

$$y' = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

$$= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})}$$

T Minden racionális $\frac{p}{q}$ számra az $x^{\frac{p}{q}}$ függvény az $x^{\frac{p}{q}-1}$ értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

B Legyen $q > 0$ és $y = x^{\frac{p}{q}}$, azaz $y^q = x^p$. Ekkor

$$qy^{q-1}y' = px^{p-1}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} \\ &= \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} \\ &= \frac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})} \\ &= \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

D ha $H \subseteq \mathcal{D}_f$, akkor f leszűkítése/megszorítása H-ra az a $f|_H$-vel jelölt függvény, melynek értelmezési tartománya H, és $x \in H$ esetén $f|_H(x) = f(x)$.

D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

D ha $H \subseteq \mathcal{D}_f$, akkor f leszűkítése/megszorítása H-ra az a $f|_H$-vel jelölt függvény, melynek értelmezési tartománya H, és $x \in H$ esetén $f|_H(x) = f(x)$.

P A sin, cos, tg, ctg függvények nem injektívek, de a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $\cos|_{[0,\pi]}$, $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$, $\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}$ függvények igen!

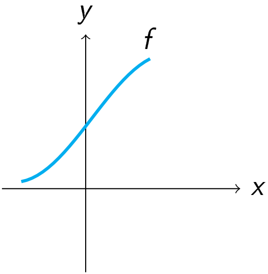
D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

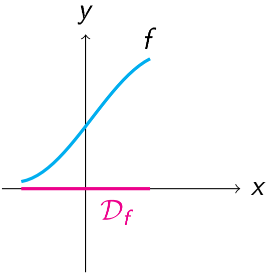
ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

D ha $H \subseteq \mathcal{D}_f$, akkor f leszűkítése/megszorítása H-ra az a $f|_H$-vel jelölt függvény, melynek értelmezési tartománya H, és $x \in H$ esetén $f|_H(x) = f(x)$.

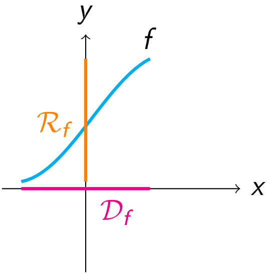
P A sin, cos, tg, ctg függvények nem injektívek, de a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $\cos|_{[0,\pi]}$, $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$, $\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}$ függvények igen!

Á Horizontális teszt: f pontosan akkor injektív, ha grafikonja egyetlen vízszintes egyenest sem metsz egynél több pontban.

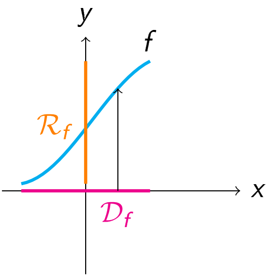

y
f
x

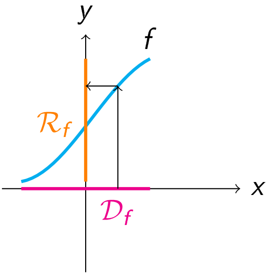


y
f
x
$\mathcal{D}_f$

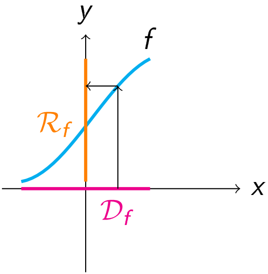


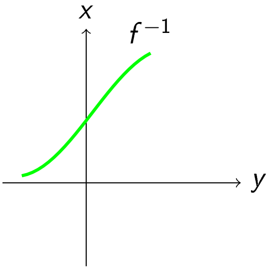
y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$

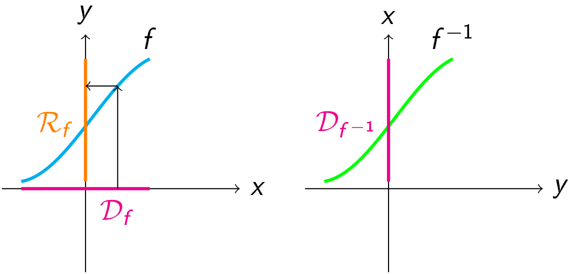

y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$



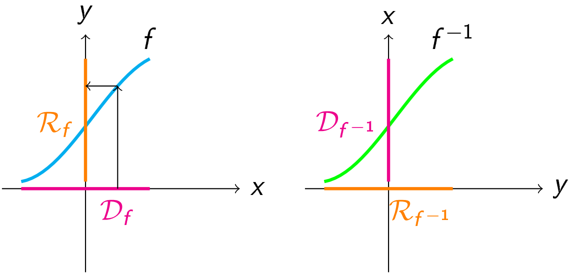
y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$

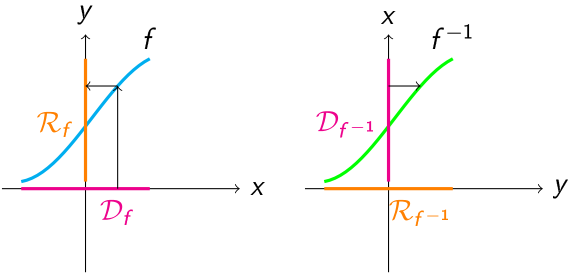

y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$


x
f^{-1}
y

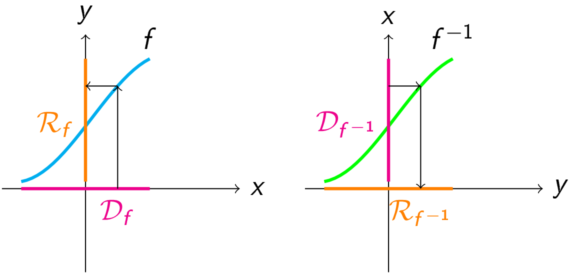


y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y

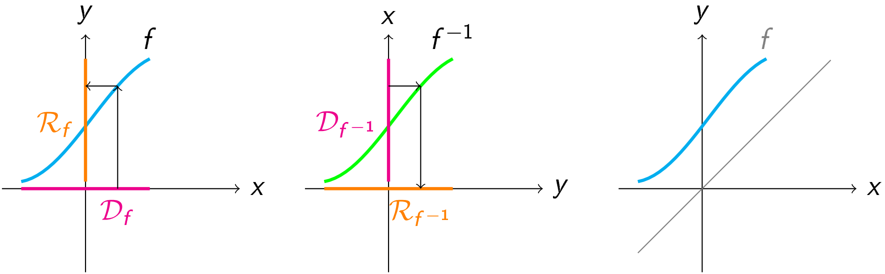

y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$

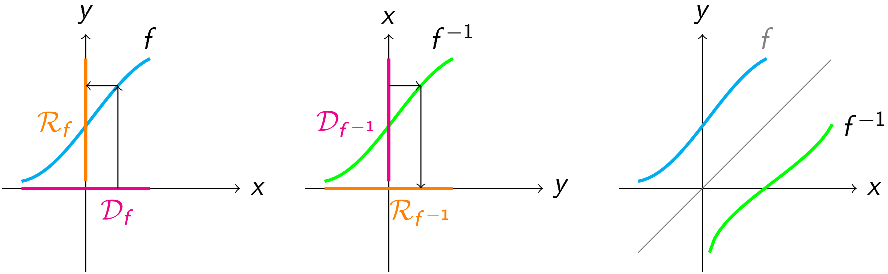


y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$

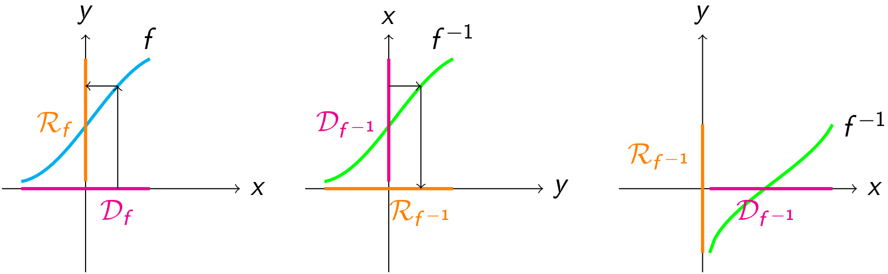


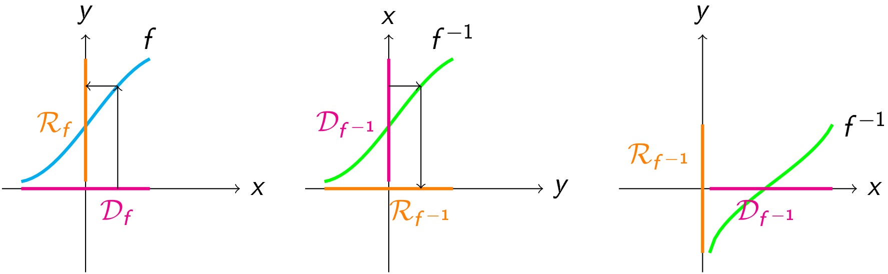
y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$


y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
y
f
x



y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
y
f
f^{-1}
x


y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
y
f^{-1}
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
x
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$


y
f
x
$\mathcal{R}_f$
$\mathcal{D}_f$
x
f^{-1}
y
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
y
x
f^{-1}
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_f = x \mapsto x$,

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_f = x \mapsto x$,

$f \circ f^{-1} : \mathcal{D}_{f^{-1}} \to \mathcal{D}_{f^{-1}} = y \mapsto y$

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_f = x \mapsto x$,

$f \circ f^{-1} : \mathcal{D}_{f^{-1}} \to \mathcal{D}_{f^{-1}} = y \mapsto y$

M f^{-1} nem tévesztendő össze f reciprokával ($\frac{1}{f}$-fel)! Függvény reciprokára ne használjuk a -1 kitevőt!

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_f = x \mapsto x$,

$f \circ f^{-1} : \mathcal{D}_{f^{-1}} \to \mathcal{D}_{f^{-1}} = y \mapsto y$

M f^{-1} nem tévesztendő össze f reciprokával ($\frac{1}{f}$-fel)! Függvény reciprokára ne használjuk a -1 kitevőt!

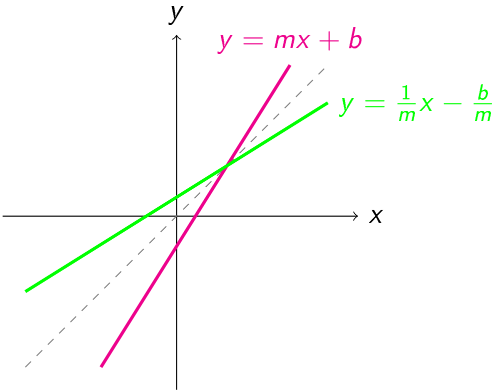
Van analógia: legyen $a \neq 0$ valós szám, és legyen f injektív függvény.

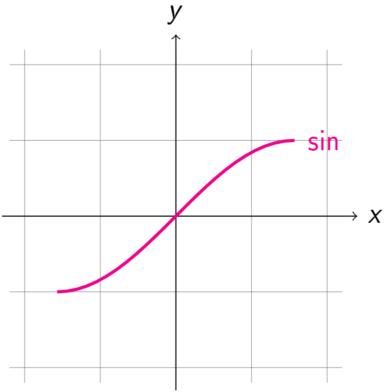
$$\begin{array}{rcl}
\cdot\ \text{(számok szorzása)} & \leftrightarrow & \circ\ \text{(függvények kompozíciója)} \\
1 & \leftrightarrow & \mathrm{id} \\
a \cdot 1 = 1 \cdot a = a & \leftrightarrow & f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f \\
\text{szám reciproka} & \leftrightarrow & \text{függvény inverze} \\
a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 & \leftrightarrow & f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}
\end{array}$$

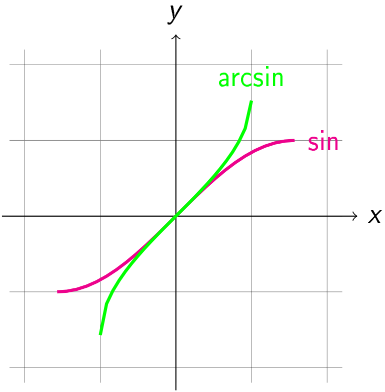
P Az $x \mapsto y = x^2$ injektív, ha $x \geqslant 0$. Inverze az x és y „felcserélése" után: $x = y^2$, azaz $y = \sqrt{x}$.

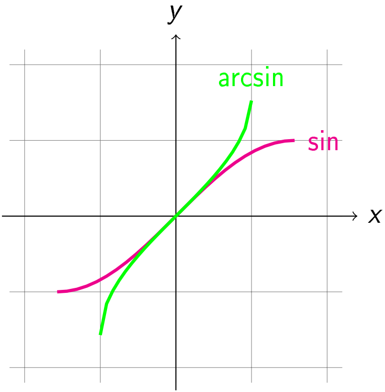
- P Az $x \mapsto y = x^2$ injektív, ha $x \geqslant 0$. Inverze az x és y „felcserélése" után: $x = y^2$, azaz $y = \sqrt{x}$.
- P Az e^x inverze az $\ln x$ függvény.

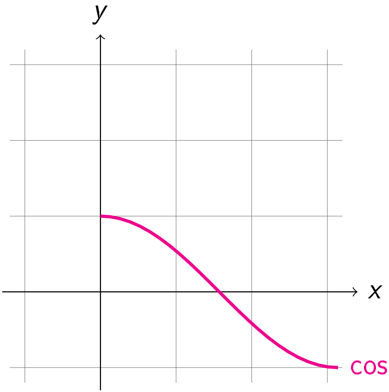
- Az $x \mapsto y = x^2$ injektív, ha $x \geqslant 0$. Inverze az x és y „felcserélése" után: $x = y^2$, azaz $y = \sqrt{x}$.
- Az e^x inverze az $\ln x$ függvény.
- Az $x \mapsto y = mx + b$ $(m \neq 0)$ inverze az $x = my + b$ összefüggésből: $y = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$.

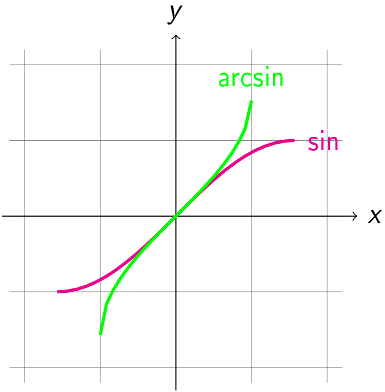


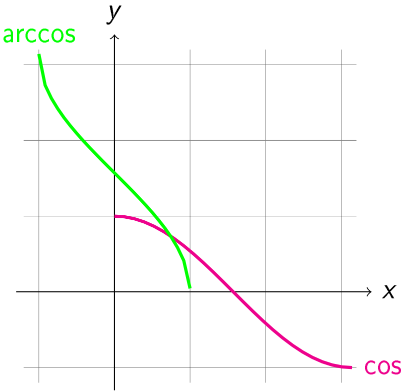

y
sin
x

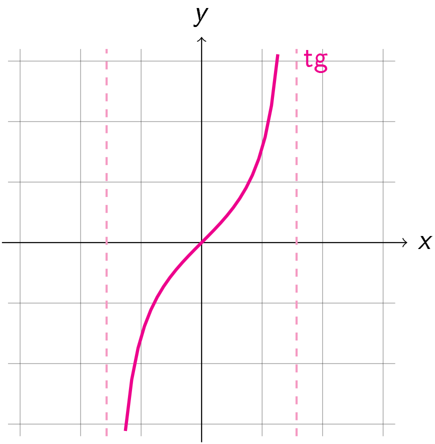

y
x
arcsin
sin


y
x
arcsin
sin

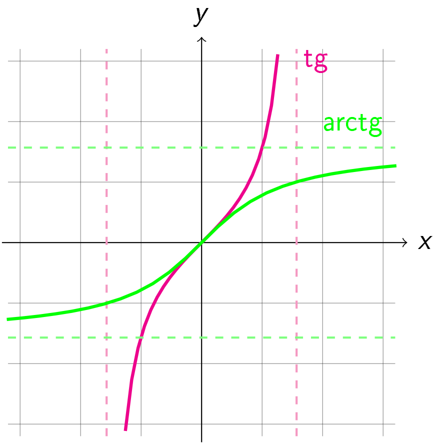

y
x
cos

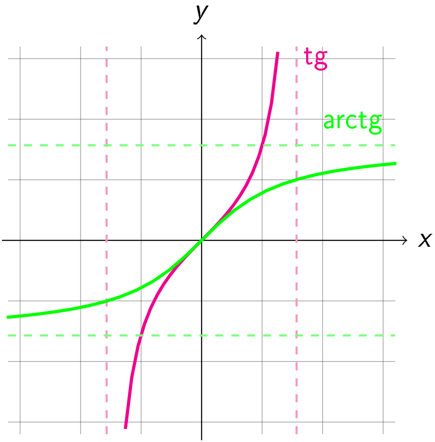

y
x
arcsin
sin

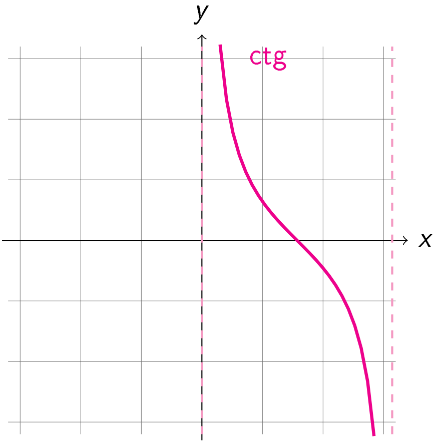

y
x
arccos
cos

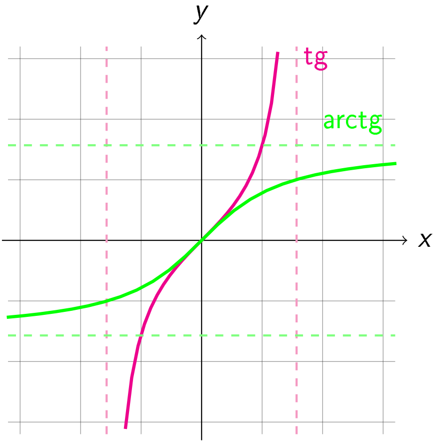


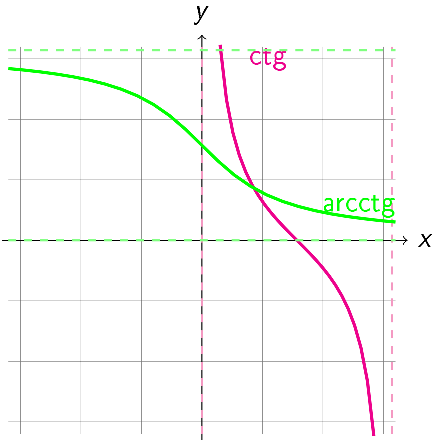
y
x
tg


y
x
tg
arctg


y
x
tg
arctg


y
x
ctg


y
x
tg
arctg


y
x
ctg
arcctg

D A trigonometrikus függvények nem injektívek, de megszorítva egy megfelelő intervallumra igen (zárójelben az amerikai jelölések):

$$\arcsin x = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad (\text{sin asin})$$

$$\arccos x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \qquad (\text{cos acos})$$

$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} \qquad (\text{tan atan})$$

$$\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} \qquad (\text{cot acot})$$

D A trigonometrikus függvények nem injektívek, de megszorítva egy megfelelő intervallumra igen (zárójelben az amerikai jelölések):

$$\arcsin x = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad (\sin\ \mathrm{asin})$$

$$\arccos x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \qquad (\cos\ \mathrm{acos})$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \left(\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} \qquad (\tan\ \mathrm{atan})$$

$$\mathrm{arcctg}\, x = \left(\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} \qquad (\cot\ \mathrm{acot})$$

Á Az arkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete:

D A trigonometrikus függvények nem injektívek, de megszorítva egy megfelelő intervallumra igen (zárójelben az amerikai jelölések):

$$\arcsin x = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad (\sin\ \text{asin})$$

$$\arccos x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \qquad (\cos\ \text{acos})$$

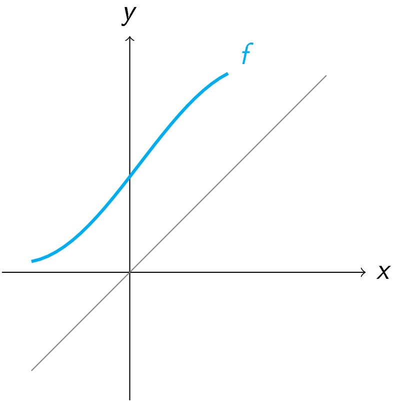
$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} \qquad (\tan\ \text{atan})$$

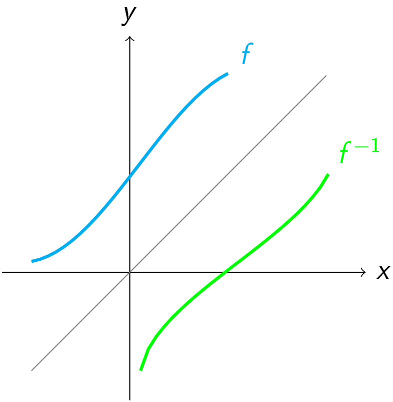
$$\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} \qquad (\cot\ \text{acot})$$

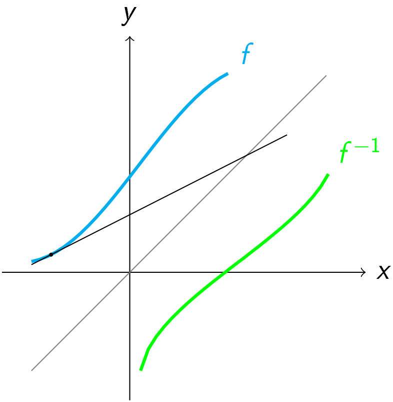
Á Az arkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete:

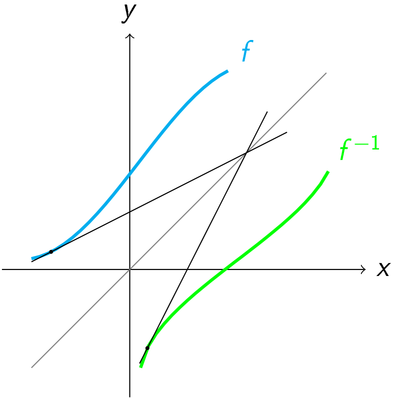
f	arcsin	arccos	arctg	arcctg
$\mathcal{D}_f$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$\mathcal{R}_f$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$

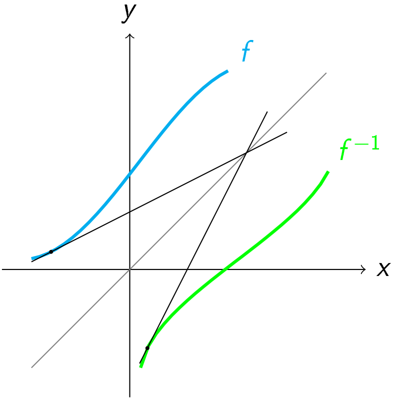
1. A differencálhatóság fogalma
   - Pontbeli differenciálhatóság
   - Jobb és bal oldali differenciálhatóság
   - Deriváltfüggvény
   - Egy pontban nem diffható függvények
   - Folytonosság és diffhatóság
2. Differenciálási szabályok
   - Összeg, szorzat, hányados
   - Néhány függvény deriváltja
   - Összetett függvény differenciálása
   - Paraméteresen adott görbék
   - Implicit függvény deriváltja
   - Függvény inverze
   - **Inverz függvény deriváltja**
   - Lineáris közelítés
   - Differenciál
3. Összefoglalás


y
f
x

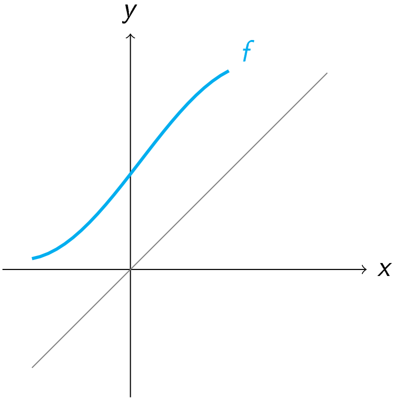

y
f
f^{-1}
x


y
f
f^{-1}
x

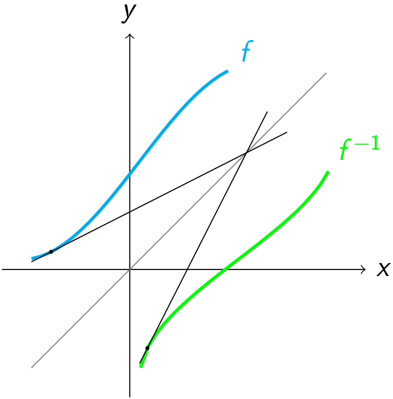

y
f
f^{-1}
x

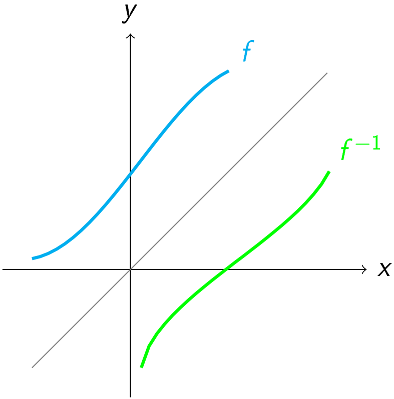


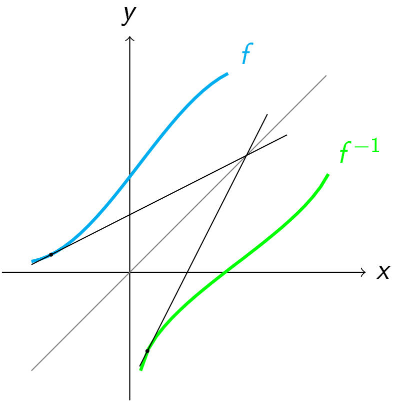
y
x
f
f^{-1}

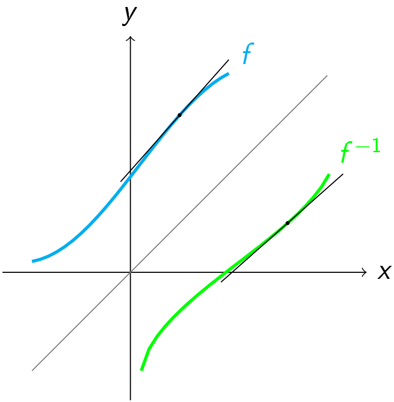


y
x
f


y
f
f^{-1}
x


y
f
f^{-1}
x


y
f
f^{-1}
x


y
f
f^{-1}
x

Tétel (Inverz függvény deriváltja)

Ha f diffható a $\mathcal{D}_f = I$ intervallumon, és a derivált sehol sem 0, akkor f^{-1} diffható, és

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Tétel (Inverz függvény deriváltja)

Ha f diffható a $\mathcal{D}_f = I$ intervallumon, és a derivált sehol sem 0, akkor f^{-1} diffható, és

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

M Ha $a \in I$, és $b = f(a)$, akkor

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Tétel (Inverz függvény deriváltja)

Ha f diffható a $\mathcal{D}_f = I$ intervallumon, és a derivált sehol sem 0, akkor f^{-1} diffható, és

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

M Ha $a \in I$, és $b = f(a)$, akkor

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Ha $y = f^{-1}(x)$, azaz $x = f(y)$, akkor

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=a}} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{f^{-1}(b)}}.$$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja $1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto \mathrm{e}^y = x$:

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto \mathrm{e}^y = x$:
$(f^{-1}(x))' = \ln'(x)$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto \mathrm{e}^y = x$:
$$(f^{-1}(x))' = \ln'(x)$$
$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto \mathrm{e}^y = x$:
$$(f^{-1}(x))' = \ln'(x)$$
$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}}$$

M (nem bizonyítás:) $x = f(f^{-1}(x))$, ennek implicit deriváltja
$1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$, innen a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

T $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \ln x$, azaz $f : y \mapsto \mathrm{e}^y = x$:
$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \ln'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}}\\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:
$(f^{-1}(x))' = \arcsin'(x)$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\end{aligned}$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$(f^{-1}(x))' = \arcsin'(x)$$
$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\end{aligned}$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \quad \text{ugyanis cos pozitív } \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\text{-n}
\end{aligned}
$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \quad \text{ugyanis cos pozitív } \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\text{-n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1, 1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \quad \text{ugyanis cos pozitív } (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\text{-n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

T $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

T $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha $x \in (-1,1)$

B $f^{-1} : x \mapsto y = \arcsin x$, azaz $f : y \mapsto \sin y = x$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(x))' &= \arcsin'(x) \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \quad \text{ugyanis cos pozitív } \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\text{-n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

T $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B ugyanis $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

Á Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjai:

Á Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjai:

f	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
f'	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathcal{D}_{f'}$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$

- Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjai:

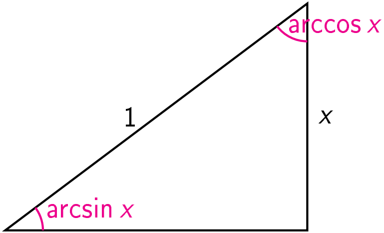
f	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
f'	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathcal{D}_{f'}$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$

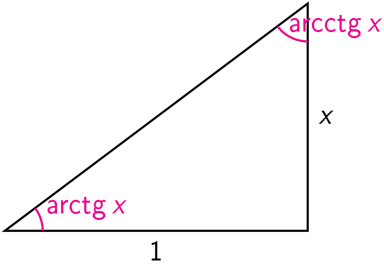
- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

- Az inverz trigonometrikus függvények deriváltjai:

f	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
f'	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathcal{D}_{f'}$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$





D Az a pontban diffható f függvény linearizációja (lineáris közelítése) az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ függvény.

D Az a pontban diffható f függvény linearizációja (lineáris közelítése) az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ függvény.

P $f(x) = \sqrt{1 + x}$ linearizációja az 0 pontban:

D Az a pontban diffható f függvény linearizációja (lineáris közelítése) az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ függvény.

P $f(x) = \sqrt{1+x}$ linearizációja az 0 pontban:
$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, így

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x.$$

D Az a pontban diffható f függvény linearizációja (lineáris közelítése) az $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ függvény.

P $f(x) = \sqrt{1+x}$ linearizációja az 0 pontban:
$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, így

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x.$$

ha x közel van 0-hoz, $\sqrt{1+x}$ közel van $1 + \frac{1}{2}x$-hez. Jelölés: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,
$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π.

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,
$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π.

- E jelöléssel értelmet kap a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölés! Ennek egyszerű következményei:

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,
$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π.

- E jelöléssel értelmet kap a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölés! Ennek egyszerű következményei:

$\mathrm{d}(y+z) = \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$,

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,
$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π.

- E jelöléssel értelmet kap a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölés! Ennek egyszerű következményei:

$\mathrm{d}(y+z) = \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$,

$\mathrm{d}(cy) = c\,\mathrm{d}y$, ahol c konstans

D Legyen f egy diffható függvény, és legyen egy rögzített x pontra $y = f(x)$. A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változókat az f függvény x-hez tartozó differenciáljainak nevezzük, ha $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

szokás még a $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ jelölés is.

P Egy kör sugara 20 m. Becsüljük meg területének növekedését, ha sugara 20.1 m-re nő.

M $A(r) = r^2\pi$, így $\mathrm{d}A = 2r\pi\,\mathrm{d}r$, ami az $r = 20$ helyen $\mathrm{d}A = 40\pi\,\mathrm{d}r$, ami $\mathrm{d}r = 0.1$ esetén $\mathrm{d}A = 40\pi 0.1 = 4\pi$, tehát a terület közel 4π-vel növekszik.

Pontosan számolva: $A(20) = 20^2\pi = 400\pi$,
$A(20.1) = 20.1^2\pi = 404.01\pi$, azaz a növekedés pontosan 4.01π.

- E jelöléssel értelmet kap a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölés! Ennek egyszerű következményei:

$\mathrm{d}(y+z) = \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$,

$\mathrm{d}(cy) = c\,\mathrm{d}y$, ahol c konstans

$\mathrm{d}(yz) = \mathrm{d}y \cdot z + y \cdot \mathrm{d}z$

Amit hibátlanul tudni kell!

- diffhatóság definíciója, mit jelent az, hogy egy függvény nem diffható egy pontban
- diffhatóság és folytonosság kapcsolata
- differenciálási szabályok (összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvény, inverz függvény)
- hatvány és trigonometrikus függvények deriváltjai
- paraméteresen adott görbe érintőjének iránytangense
- implicit függvény deriváltja
- az e szám definíciója
- trigonometrikus függvények injektív megszorításai, inverzeik
- inverz trigonometrikus függvények és a logaritmus függvény deriváltja