

# Tartalomjegyzék

## I. A lineáris algebra forrásai 5

### 1 Vektorok 9

#### Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben 9

Írányított szakasz, kötött és szabad vektor 9 • Vektor magadása egy irányított szakasszal 10 • Vektor megadása hossz és irány segítségével 11 • Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben 11

- A lineáris kombináció definíciója 13
- Lineáris függetlenség 15
- Speciális lineáris kombinációk\* 16

#### Távolság, szög, orientáció 19

Skaláris szorzás 19 • Hosszúság és szög 20

- Pithagorász-tétel 21
- Két fontos egyenlőtlenség 21
- Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés 22
- Merőlegesség és orientáció 23
- Vektori szorzás 24
- Parallelepipedon térfogata és előjeles térfogata 27
- Vegyes szorzat 28

#### Vektorok koordinátás alakban 31

Descartes-féle koordinátarendszer 31 • Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal 32 • A derékszögű koordinátarendszer 34 • Az  $\mathbb{R}^n$  halmaz 36 • Vektorok összeadása és skalárral szorzása  $\mathbb{R}^n$ -ben 37 • Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség 38

- Skaláris szorzás  $\mathbb{R}^n$ -ben 40
- Távolság és szög  $\mathbb{R}^n$ -ben 41
- Korrelációs együttható\* 44
- Bitvektorok, kódvektorok\* 45
- Vektorműveletek  $\mathbb{Z}_m^n$ -ben\* 46

#### Megoldások 50

### 2 Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk 53

#### Egyenes és sík egyenletei 53

Alakzatok és egyenletek 53 • Síkbeli egyenes egyenletei 55  
 • Síkbeli pont egyenletei 58 • A 3-dimenziós tér síkjainak  
 egyenletei 59 • Térbeli egyenes egyenletei 61 • Térbeli pont  
 egyenletei 64 • Egyenletek  $\mathbb{R}^n$ -ben 64

### *A lineáris egyenletrendszer és két modellje* 67

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer 67 • Ekvivalens lineáris  
 egyenletrendszerek 69 • Mátrixok 70 • Egyenletrendszer  
 mátrixa és bővített mátrixa 71 • Sormodell: hipersíkok  
 metszete 73 • Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris  
 kombinációként 75

### *Megoldás kiküszöböléssel* 78

Elemi sorműveletek 78 • Lépcsős alak 78 • Gauss-módszer 79  
 • Redukált lépcsős alak 83 • Gauss–Jordan-módszer 84 • A  
 redukált lépcsős alak egyértelműsége 86 • Szimultán  
 egyenletrendszerek 87 • Kiküszöbölés  $\mathbb{Z}_p$ -ben \* 89

### *Megoldás a gyakorlatban* 92

A kiküszöbölés műveletigénye 92 • Numerikusan instabil  
 egyenletrendszerek 92 • Részleges főelemkiválasztás 94  
 • Skálázás 96 • Iteratív módszerek 97 • Jacobi-iteráció 98  
 • Gauss–Seidel-iteráció 99 • Az iterációk konvergenciája 100

### *Megoldások* 104

## *Irodalomjegyzék* 107

## *Tárgymutató* 109

# Listák

## Tételek, állítások, következmények

1.2. Parallelogramma-módszer . . . . .	12	1.57. Ortozonális vektorrendszer lineáris független-sége . . . . .	43
1.5. A vektorműveletek tulajdonságai . . . . .	13	2.5. Síkbeli egyenes explicit vektoregyenlete . . . . .	55
1.7. Vektorral párhuzamos vektorok . . . . .	14	2.6. Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete . . . . .	56
1.8. Két vektorral egy síkba eső vektorok . . . . .	14	2.7. Síkbeli egyenes explicit egyenletrendszere . . . . .	56
1.9. Térbeli vektorok . . . . .	15	2.8. Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete . . . . .	56
1.11. Síkbeli vektor felbontása . . . . .	16	2.10. Sík explicit vektoregyenlete . . . . .	59
1.12. Térbeli vektor felbontása . . . . .	16	2.11. Sík implicit vektoregyenlete . . . . .	59
1.13. Két ponton átmenő egyenes jellemzése . . . . .	16	2.12. Sík explicit egyenletrendszere . . . . .	60
1.14. Intervallum pontjainak jellemzése . . . . .	17	2.13. Sík implicit egyenlete . . . . .	60
1.17. Mikor 0 a skaláris szorzat? . . . . .	19	2.15. Térbeli egyenes explicit vektoregyenlete . . . . .	61
1.18. A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai . . . . .	20	2.16. Térbeli egyenes explicit egyenletrendszere . . . . .	62
1.19. Pithagorász-tétel . . . . .	21	2.17. Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere . . . . .	62
1.21. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	21	2.24. Ekvivalens átalakítások . . . . .	69
1.22. Háromszög-egyenlőtlenség . . . . .	22	2.28. Sormodell . . . . .	75
1.23. Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése	22	2.30. Oszlopmodell . . . . .	76
1.24. Vektor felbontása merőleges összetevőkre . . . . .	23	2.36. Lépcsős alakra hozás . . . . .	81
1.29. Mikor 0 a vektori szorzat? . . . . .	26	2.44. A redukált lépcsős alak egyértelmű . . . . .	86
1.30. Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése . . . . .	26	2.50. A kiküszöbölés műveletigénye . . . . .	92
1.31. Vektori szorzás műveleti tulajdonságai . . . . .	27	2.59. Elégséges feltétel az iterációk konvergenciájára . . . . .	101
1.35. Ekvivalenciareláció . . . . .	30		
1.38. Vektorműveletek koordinátás alakja . . . . .	33		
1.40. Skaláris szorzat ortonormált koordinátarendszerben . . . . .	34		
1.41. Vektori szorzat ortonormált koordinátarendszerben . . . . .	35		
1.46. Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai	37		
1.48. Lineáris függetlenség . . . . .	39		
1.49. Lineáris összefüggőség . . . . .	40		
1.51. A skaláris szorzás tulajdonságai . . . . .	41		
1.54. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	42		
1.55. Háromszög-egyenlőtlenség $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	43		
1.56. Skaláris szorzat és abszolút érték $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	43		

## Definíciók

. Irányított szakasz, kötött vektor . . . . .	9
. Vektor . . . . .	10
. Zérusvektor . . . . .	10
. Vektor hossza . . . . .	11
. Vektorok szöge . . . . .	11
1.1. Két vektor összege – háromszögmódszer . . . . .	11
1.3. Vektorok különbsége . . . . .	12
1.4. Vektor szorzása skalárral . . . . .	13
1.6. Lineáris kombináció . . . . .	13
1.10. Vektorok függetlensége . . . . .	15
1.15. Két vektor skaláris szorzata . . . . .	19
. Egységvektor . . . . .	22
1.26. Vektori szorzás . . . . .	25
1.33. Vegyes szorzat . . . . .	28
. Vektor koordinátás alakja 2D-ben . . . . .	31

. Vektor koordinátás alakja 3D-ben . . . . .	31	1.47. . . . .	38
1.44. . . . .	36	1.53. Vektorok szöge és távolsága . . . . .	42
1.45. Vektorműveletek $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	37	1.59. Lineáris kombináció $\mathbb{Z}_m^n$ -ben . . . . .	46
1.50. Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	41	1.60. One time pad – a tökéletes titkosítás . . . . .	47
1.52. Abszolút érték, szög, merőlegesség, távolság . . . . .	41	1.61. Paritásbit . . . . .	48
. Korrelációs együttható . . . . .	44	2.1. Az $x + y = 1$ egyenlet . . . . .	53
1.58. Kód . . . . .	46	2.2. Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet . . . . .	53
2.3. Alakzat (implicit) egyenletrendszere . . . . .	54	2.9. Síkbeli egyenes egyenletei . . . . .	57
2.4. Alakzat (explicit) egyenletrendszere . . . . .	55	2.14. Sík egyenletei . . . . .	60
. Hipersík . . . . .	65	2.18. Térbeli egyenes egyenletrendszerei . . . . .	63
2.20. Lineáris egyenlet . . . . .	67	2.19. Egyenes és sík explicit vektoregyenlete . . . . .	65
2.21. Lineáris egyenletrendszer . . . . .	68	2.25. Mátrixok és elemeik . . . . .	71
2.22. Lineáris egyenletrendszer megoldása . . . . .	69	2.26. Mátrix használata a megoldáshoz . . . . .	72
2.23. Ekvivalens egyenletrendszerek . . . . .	69	2.27. Sormodell két kétismeretlenes egyenlettel . . . . .	73
2.31. Elemi sorműveletek . . . . .	78	2.29. Oszlopmodell . . . . .	76
2.32. Lépcsős alak . . . . .	78	2.33. Lépcsős alak . . . . .	79
2.39. Redukált lépcsős alak . . . . .	83	2.34. Gauss-módszer, egy megoldás . . . . .	79
. rref függvény . . . . .	87	2.35. Gauss-módszer, végtelen sok megoldás . . . . .	80
2.45. Szimultán egyenletrendszerek . . . . .	87	2.37. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása . . . . .	82
2.58. Soronként domináns főátlójú mátrix . . . . .	101	2.38. Síkok metszéspontjának meghatározása . . . . .	82
		2.40. Redukált lépcsős alak . . . . .	83
		2.41. Redukált lépcsős alakra hozás . . . . .	84
		2.42. Gauss–Jordan-módszer, egy megoldás . . . . .	84
		2.43. Gauss–Jordan-módszer, végtelen sok megoldás . . . . .	85
		2.46. Szimultán egyenletrendszer megoldása . . . . .	88
		2.47. Szimultán egyenletrendszer bővített mátrixa . . . . .	88
		2.48. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött . . . . .	89
		2.49. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_5$ fölött . . . . .	90
		2.51. Instabil egyenletrendszer . . . . .	93
		2.52. Gauss-módszer lebegőpontos számokkal . . . . .	94
		2.53. Részleges főelemkiválasztás . . . . .	95
		2.54. Sor szorzása . . . . .	96
		2.55. Jacobi-iteráció . . . . .	98
		2.56. Gauss–Seidel-iteráció . . . . .	99
		2.57. Divergens iteráció . . . . .	100
<i>Kidolgozott példák</i>			
1.16. Skaláris szorzat kiszámítása a definíció alapján . . . . .	19		
1.20. Skaláris szorzat kiszámítása . . . . .	21		
1.25. Merőleges összetevőkre bontás . . . . .	23		
1.27. Vektori szorzat meghatározása . . . . .	25		
1.28. $\mathbf{i}$ , $\mathbf{j}$ , $\mathbf{k}$ vektori szorzata . . . . .	26		
1.32. Parallelepipedon térfogata . . . . .	27		
1.34. Vegyes szorzat . . . . .	28		
1.36. Vektorok koordinátái . . . . .	31		
1.37. Pontok koordinátái . . . . .	32		
1.39. Skaláris szorzás koordinátarendszerben . . . . .	33		
1.42. Parallelogramma területe . . . . .	35		
1.43. Parallelepipedon térfogata . . . . .	36		

**I. rész**

# **A lineáris algebra forrásai**



A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyamattá válik.



Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplemattfish





# 1

## Vektorok

Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges; ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számításokban használt többszázezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorokon át a matematika különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

### Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

---

*E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig jutunk. E szakasz kulcsfogalma: egy vektor lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként való előállítása.*

---

*Irányított szakasz, kötött és szabad vektor* Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számptalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával. Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az  $A$  kezdőpontú és  $B$  végpontú irányított szakaszt  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

*Skalár, skaláris: a lépcső, létra jelentésű latin scalae (scālae) szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrizi az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.*

Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).

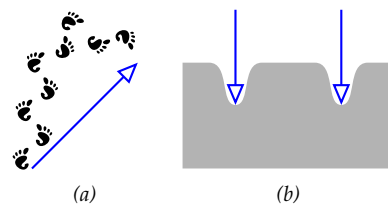
Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, azaz hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása: a *vektor* a geometriában irányított szakasszal reprezentálható azt hozzávéve, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók (ld. 1.3 ábra).

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl.  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az  $\mathbf{F}$  erő, a  $\mathbf{B}$  indukció is vektormennyiségek.

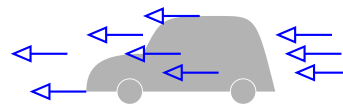
**Vektor magadása egy irányított szakasszal** Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiál a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy  $P$  pontba húzott irányított  $\vec{OP}$  szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokkal jellemezni. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz  $\mathbf{0}$ -val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

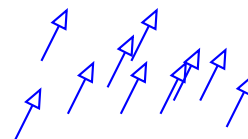


1.1. ábra: Kötött vektorok: (a) elmozdulásvektor (lábnyomokkal), (b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora



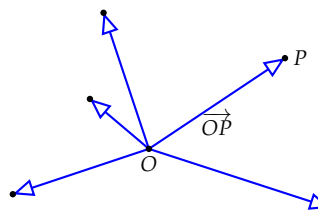
1.2. ábra: Példa szabad vektorra

**VEKTOR:** a *hordozó*, *vivő*, *utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírus-hordozó értelemben használják.



1.3. ábra: Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

**VEKTOROK JELÖLÉSE:** Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl.  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$ ,  $\vec{v}$ , ...), de körültekintő jelölésrendszer és jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk ( $x$ ,  $u$ ,  $v$ , ...).



1.4. ábra: A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy  $P$  pontnak az  $\vec{OP}$  vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

**Vektor megadása hossz és irány segítségével** Ha tudunk távolságot mérni és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. A vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát, a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az  $\mathbf{a}$  vektor abszolút értékét  $|\mathbf{a}|$  jelöli. Vektor abszolút értékét a vektor *euklideszi normájának* is nevezik, ugyanis speciális esete egy később részletezendő fogalomnak, a normának. Az  $\mathbf{a}$  vektor (euklideszi) normájának jelölése az abszolút értékre emlékeztet:  $\|\mathbf{a}\|$ .

Az irány fogalmát az 1.38. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányúnak* vagy *egyirányúnak* nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5 (a) ábra). Két nemzérus vektort *kollineárisnak* vagy *párhuzamosnak* nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányúnak* nevezünk (1.5 (b) ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.

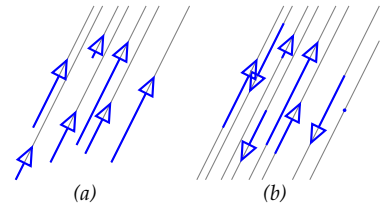
Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok szögét  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$  jelöli. Két vektor szöge tehát mindig  $0^\circ$  és  $180^\circ$  – radiánban mérve  $0$  és  $\pi$  – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge  $0$ , ellenkező irányúaké  $\pi$ .

**Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben** A vektorműveletek – az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok tipikus alkalmazásaira gondolunk. Pl. magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk.

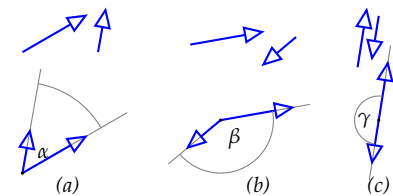
**1.1. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER).** Legyen adva két vektor,  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$ . Vegyünk föl egy tetszőleges  $O$  pontot. Indítsunk belőle egy  $\mathbf{a}$ -val egyenlő  $\overrightarrow{OP}$  vektort, ennek végpontjából pedig egy  $\mathbf{b}$ -vel egyenlő  $\overrightarrow{PQ}$  vektort. Az  $\overrightarrow{OQ}$  vektort az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összegének nevezzük és  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -vel jelöljük (ld. 1.7. ábra).

Könnyen belátható, hogy az eredmény független az  $O$  pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).

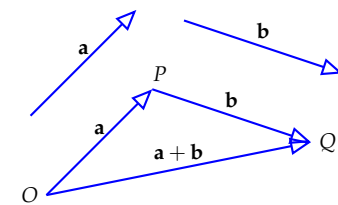
Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:



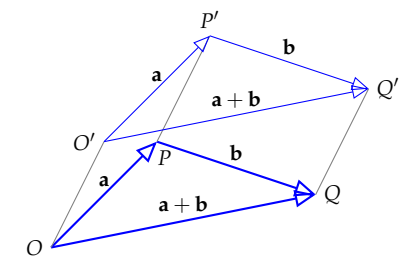
1.5. ábra: (a) egyirányú vektorok, (b) kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak közöttük egyirányúak és ellenkező irányúak



1.6. ábra: Két vektor szöge ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ ). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.



1.7. ábra: Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor összege

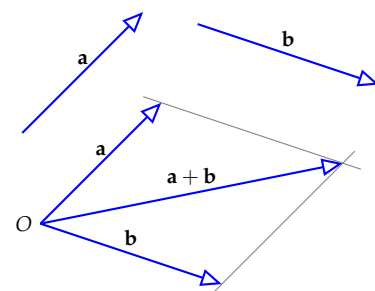
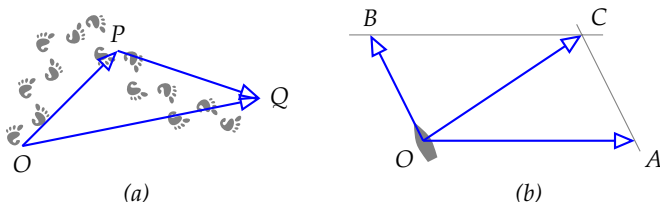


1.8. ábra: Az összeg független az  $O$  pont megválasztásától, ugyanis  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$ .

**1.2. ÁLLÍTÁS (PARALLELOGRAMMA-MÓDSZER).** A közös kezdőpontból indított  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összege megkapható abból a parallelogrammából, melynek két szomszédos oldala  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$ , ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított és a parallelogramma szemközi csúcsába futó vektor.

► Ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem kollineárisak, akkor összegük pl. megkapható úgy, hogy  $\mathbf{a}$  végpontján át egy  $\mathbf{b}$  egyenesével,  $\mathbf{b}$  végpontján át egy  $\mathbf{a}$  egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).

Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a parallelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).



1.9. ábra: Parallelogramma-módszer

1.10. ábra: Az (a) ábrán a lábnyomok  $O$ -ból  $P$ -be, majd onnan  $Q$ -ba vezetnek. Az  $\overrightarrow{OP}$  és a  $\overrightarrow{PQ}$  elmozdulásvektorok összege  $\overrightarrow{OQ}$  (háromszögmódszer). A (b) ábrán a csónak az  $\overrightarrow{OB}$  irányba evez, de a folyó  $\overrightarrow{OA}$  irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege  $\overrightarrow{OC}$  (parallelogramma módszer).

Ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a parallelogramma-módszerben is az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  vektorok mindig komplanárisak.

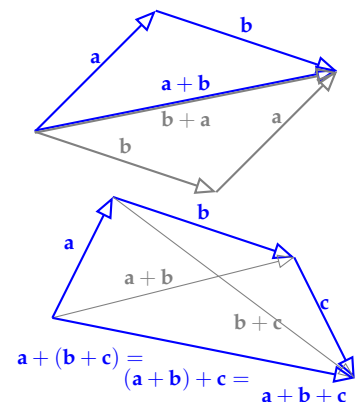
A vektorösszeadás két fontos tulajdonsága a kommutativitás ( $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ) és az asszociativitás ( $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ ) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  írható.

Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan  $\mathbf{x}$  vektor létezik, melyre  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$  (ld. 1.12 (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

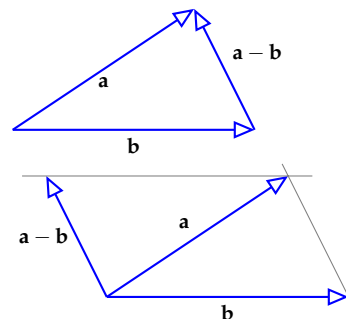
**1.3. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE).** Adva van az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor. Azt az egyértelműen létező  $\mathbf{x}$  vektort, melyre  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$ , az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  különbségének nevezzük és  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ -vel jelöljük.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha a definícióra gondolunk, azaz arra, hogy  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  az  $\mathbf{a}$  vektor, melyet  $\mathbf{b}$ -hez adva  $\mathbf{a}$ -t kapunk, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$



1.11. ábra: A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.



1.12. ábra: A különbségvektor meghatározása háromszög- és parallelogrammamódszerrel.

Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a  $\mathbf{b}$  vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort  $-\mathbf{b}$  jelöli, akkor fennáll az  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$  összefüggés, és így az is igaz, hogy  $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ .

Érdekes megjegyezni, hogy ha  $P$  és  $Q$  két tetszőleges pont, akkor az  $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$  vektort akkor is ismerjük, ha az  $O$  pontot nem, hisz az a  $\overrightarrow{PQ}$  vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.

**1.4. DEFINÍCIÓ (VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL).** Legyen  $k$  valós szám. Az  $\mathbf{a}$  vektor  $k$ -szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az  $\mathbf{a}$  hosszának  $|k|$ -szorosa, iránya

- tetszőleges, ha  $k = 0$  vagy  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,
- megegyezik  $\mathbf{a}$  irányával, ha  $k > 0$ , és
- ellentétes, ha  $k < 0$  (ld. 1.14. ábra).

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden  $\mathbf{a}$  vektorra  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ,  $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$  és  $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ .

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az olvasóra hagyjuk.

**1.5. TÉTEL (A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI).** Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai,  $\mathbf{0}$  a zérusvektor és  $r$ ,  $s$  két tetszőleges valós szám, akkor fennállnak az alábbi azonosságok:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$                               | e) $r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$                        |
| b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | f) $r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$ |
| c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  | g) $(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$          |
| d) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$   | h) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ |

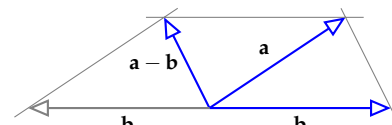
**A lineáris kombináció definíciója** Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

**1.6. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ).** Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol  $c_1, c_2, \dots, c_k$  valós számok. Azt mondjuk, hogy a  $\mathbf{v}$  vektor előáll az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan  $c_1, c_2, \dots, c_k$  valós számok, hogy  $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$ .

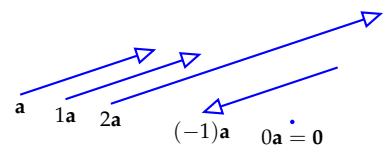
Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát). Ennél több is igaz:



1.13. ábra: Az  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$  szemléltetése.

**TORZOR:** a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0 energiaszinthez, beszélhetünk a rendszer energiájáról is. (2) A pontba mutató vektor fogalmának nincs értelme, amíg nincs kijelölve az origó, viszont két pontba mutató vektor különbségét az origótól függetlenül is meg tudjuk határozni. (3) Egy  $f$  függvény  $I$  intervallumon vett határozatlan integrálja  $F + C$  alakú, ahol  $C$  konstans. Nincs értelme megkérdezni, hogy  $f$  egy konkrét primitív függvényében mennyi a  $C$  értéke, de két primitív függvény különbsége mindig egy konstans. (4) Egy hasonló jelenség a zenéből: bármely két hang közti távolság meghatározható, de azt nem mondhatjuk egy hangra, hogy az a „fá”, amíg nem rögzítjük, melyik a „dó”.

A torzort egy *kommutatív csoport* nevű algebrai struktúrával definiálhatjuk, mely egy kommutatív, asszociatív, null-elemes, invertálható művelettel ellátott és e műveletre zárt halmaz. Kommutatív csoport például a valósok az összeadásra nézve, a vektorok az összeadásra nézve, vagy  $\mathbb{Z}_{12}$  az összeadásra nézve (ld. a ?? példát és a ?? definíciót). Legyen  $G$  egy kommutatív csoport, és  $X$  egy nem üres halmaz, melyen definiálva van bármely két elem különbsége, ami  $G$ -beli. Ekkor  $X$ -et  *$G$ -torzornak* nevezzük, ha bármely  $x_0, x_1, x_2 \in X$  elem esetén, ha  $x_1 - x_0 = g_1$  és  $x_2 - x_0 = g_2$ , akkor  $x_1 - x_2 = g_1 - g_2$ . Más-ként fogalmazva,  $X$  örzi  $G$  struktúráját a zéruselem nélkül úgy, hogy bármely elemét zéruselemnek választva azonnal megkapjuk  $G$ -t.



1.14. ábra: Vektor skalárszorosai

**1.7. TÉTEL (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK).** Ha  $\mathbf{a}$  nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos  $\mathbf{v}$  vektor az  $\mathbf{a}$  skalárszorosa, azaz van olyan  $c$  valós szám, hogy  $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$ , más szóval  $\mathbf{v}$  előáll az  $\mathbf{a}$  valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.

**BIZONYÍTÁS.** Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő  $c$  konstans egyszerűen a  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{a}$  vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados  $(-1)$ -szerese.  $\square$

E tétel következménye, hogy ha  $\mathbf{a}$  nem zérusvektor, akkor az  $\mathbf{a}$  összes lineáris kombinációjának halmaza és az  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy origón átmenő egyenest ad.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

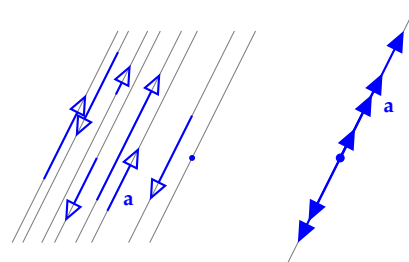
**1.8. TÉTEL (KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK).** Ha  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső  $\mathbf{v}$  vektor előáll az  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan  $v_1$  és  $v_2$  konstans, hogy  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ . Ez az előállítás egyértelmű.

**BIZONYÍTÁS.** A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.16. ábráról. A  $\mathbf{v}$  végpontjából húzzunk az  $\mathbf{a}_1$  és az  $\mathbf{a}_2$  vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött – esetleg elfajuló – paralelogramma két oldala az előző tétel szerint  $\mathbf{a}_1$ , illetve  $\mathbf{a}_2$  konstansszorosa, melyek összege a paralelogramma szabály szerint épp  $\mathbf{v}$ . Előállítottuk tehát  $\mathbf{v}$ -t  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

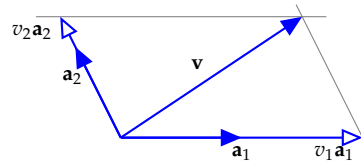
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a  $\mathbf{v}$  vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után  $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$ . Mivel  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ , ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$ , azaz ha  $v_1 = w_1$  és  $v_2 = w_2$ . Tehát a felbontás egyértelmű.  $\square$

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva: két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy origón átmenő síkot ad.



1.15. ábra: Egy nemzérus  $\mathbf{a}$  vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.



1.16. ábra: A  $\mathbf{v}$  egyértelműen előáll  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$  alakban, ha  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  nem párhuzamos.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

**1.9. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOROK).** Ha  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_3$  nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely  $\mathbf{v}$  vektora előáll az  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_3$  valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan  $v_1$ ,  $v_2$  és  $v_3$  konstans, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \quad (1.1)$$

Ez az előállítás egyértelmű.

**BIZONYÍTÁS.** A  $\mathbf{v}$  vektor  $V$  végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az  $\mathbf{a}_3$  vektorral, mely az  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  vektorok síkját egy  $C$  pontban metszi (1.17. (a) ábra). Az  $\overrightarrow{OC}$  vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  lineáris kombinációjaként, azaz  $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$  (ld. 1.17. (b) ábra). Másrészt  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$ , ahol  $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$ , így  $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$  valamely  $v_3$  valósra. Tehát  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$ .

Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

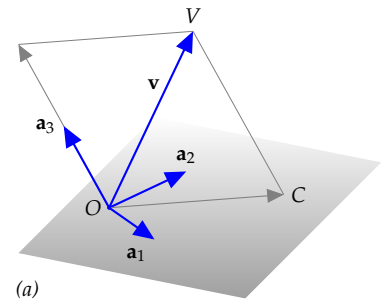
a  $\mathbf{v}$  két felbontása. Ekkor  $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ . Így ha  $v_1 \neq w_1$ , akkor  $\mathbf{a}_1$  kifejezhető  $\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_3$  lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

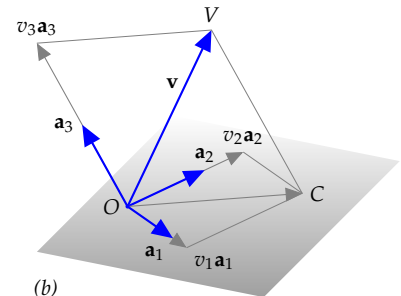
Ez ellentmond annak, hogy  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_3$  nem esnek egy síkba. Így tehát  $v_1 = w_1$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $v_2 = w_2$  és  $v_3 = w_3$ , azaz az (1.1) előállítás egyértelmű.  $\square$

**Lineáris függetlenség** Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, ekkor valamelyikük a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esik egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ekkor viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjuként. Látjuk, alapvető, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

**1.10. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE).** Azt mondjuk, hogy egy  $\mathbf{v}$  vektor lineárisan független az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  ( $n \geq 1$ ) vektoroktól, ha  $\mathbf{v}$  nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  ( $n \geq 2$ ) vektorok lineárisan függetlenek ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.



(a)



(b)

1.17. ábra: A térbeli  $\mathbf{v}$  vektor előállítása három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként.

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (1.19. ábra).

Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (1.19. ábra).

Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:

1.11. TÉTEL (SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA). Ha  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan  $v_1$  és  $v_2$  valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA). Ha  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_3$  három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan  $v_1$ ,  $v_2$  és  $v_3$  valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

A koordinátákról szóló szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

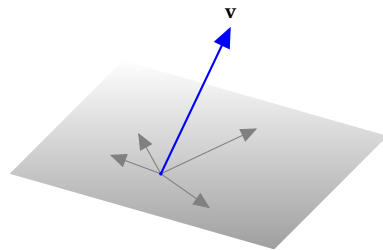
**Speciális lineáris kombinációk\*** A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.

1.13. ÁLLÍTÁS (KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE). Legyen  $O$ ,  $A$  és  $B$  a sík vagy a tér három pontja. Az  $r\vec{OA} + s\vec{OB}$  alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az  $A$  és  $B$  ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha  $r + s = 1$ .

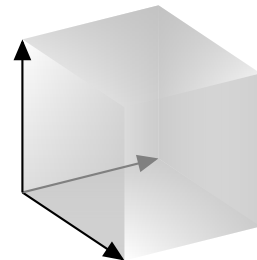
**BIZONYÍTÁS.** Legyen  $\mathbf{a} = \vec{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{OB}$ , és  $\mathbf{x}$  mutasson az  $AB$  egyenes valamely  $X$  pontjára, azaz legyen  $\mathbf{x} = \vec{OB} + r\vec{BA}$  valamilyen  $r$  valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

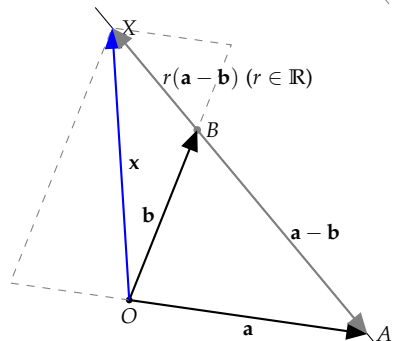
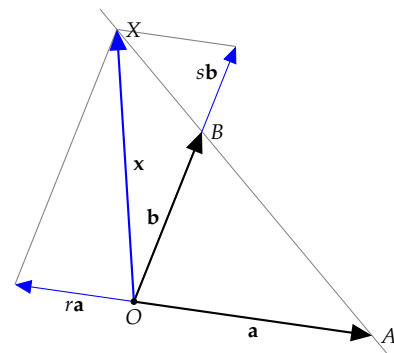
A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós  $r$  számra az  $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$  vektor végpontja az  $AB$  egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$  alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél  $r + s = 1$  (ld. ?? ábra).  $\square$



1.18. ábra: A síkba nem eső  $\mathbf{v}$  vektor nem áll elő a síkbeli vektorok lineáris kombinációjaként.



1.19. ábra: Egy kocka három egy csúcsból induló élvektora lineárisan független.



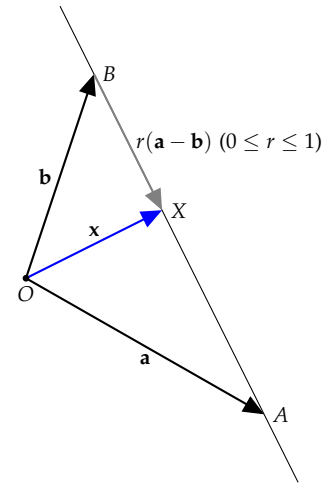
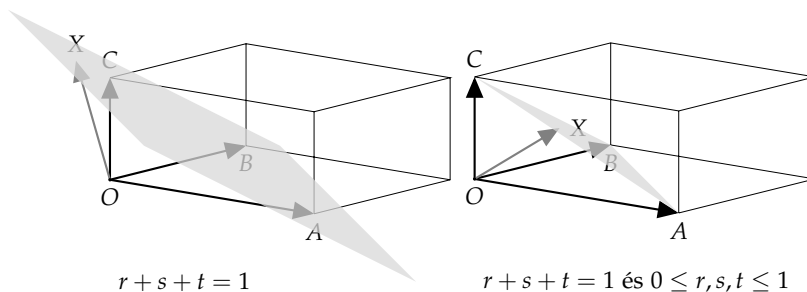
1.20. ábra: Az  $X$  pont pontosan akkor van az  $AB$  egyenesen, ha azon  $r$  és  $s$  valósokra, melyekre  $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$ ,  $r + s = 1$  teljesül. Ezen az ábrán  $r = -0.5$ ,  $s = 1.5$ .



1.14. ÁLLÍTÁS (INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE). Legyen  $O$ ,  $A$  és  $B$  a sík vagy a tér három pontja. Az  $r\vec{OA} + s\vec{OB}$  vektor pontosan akkor mutat az  $A$  és  $B$  pontot összekötő szakasz valamely pontjába, ha  $r + s = 1$  és  $0 \leq r, s \leq 1$ .

**BIZONYÍTÁS.** Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a  $\vec{BX} = r\vec{BA}$  összefüggés csak 0 és 1 közé eső  $r$  értékekre igaz. Tehát  $\mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1-r)\mathbf{b}$ , ahol  $0 \leq r \leq 1$ . Másként fogalmazva az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok az  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$  alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben  $r + s = 1$  és  $0 \leq r, s \leq 1$  (ld. 1.21 ábra).  $\square$

Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$  alakba írva  $r + s + t = 1$ . Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen  $0 \leq r, s, t \leq 1$ , akkor az  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$  alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. az 1.22. ábrát és a ?? feladatot).

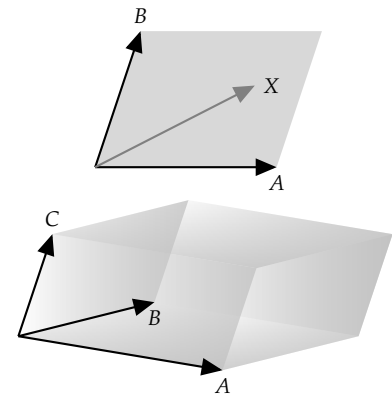


1.21. ábra: Az  $X$  pont pontosan akkor van az  $\overline{AB}$  intervallumban, ha valamely  $0$  és  $1$  közé eső  $r$  és  $s$  valósokra  $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$ , és  $r + s = 1$ .

1.22. ábra: Az  $X$  pont pontosan akkor esik az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokon átmenő síkba, ha  $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$  és  $r + s + t = 1$ . Az  $X$  az  $ABC$  háromszögbe pedig pontosan akkor esik, ha ezen kívül még  $0 \leq r, s, t \leq 1$  is fennáll.

Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.23. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy paralelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$  alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  által meghatározott (kifeszített) *parallelogrammához*, ha  $0 \leq r, s \leq 1$ .

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy  $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$  alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  által kifeszített *parallelepipedonhoz*, ha  $0 \leq r, s, t \leq 1$  (1.23. ábra).

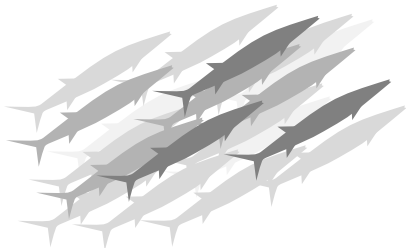


1.23. ábra: A *parallelogramma* és a *parallelepipedon* olyan lineáris kombinációkkal állítható elő, ahol az együtthatók 0 és 1 közé esnek.

## Feladatok

### Vektor

1.1. Egy matematikán kívüli szemléltetés a vektor fogalmához: hogyan fejeznénk be az alábbi hasonlatot? „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a...”



1.2. **VEKTOROK: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Ha az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok hajlásszöge  $\alpha$ , akkor  $\mathbf{a}$  és  $-\mathbf{b}$  hajlásszöge  $\pi - \alpha$ .
- Ha  $A$  és  $B$  két adott pont, akkor az  $\vec{OA} + \vec{OB}$  vektor független az  $O$  megválasztásától.
- Ha  $A$  és  $B$  két adott pont, akkor az  $\vec{OA} - \vec{OB}$  vektor független az  $O$  megválasztásától.
- Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.
- Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.
- Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

### Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

1.3. Adva van a síkban két tetszőleges vektor,  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$ . Szerkesszük meg a következő vektorokat: a)  $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , b)  $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , c)  $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ , d)  $\mathbf{f} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$ .

1.4. Legyen  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Fejezzük ki az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor segítségével a következő vektorokat: a)  $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ , b)  $3\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ , c)  $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , d)  $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$ .

1.5. Tekintsük az  $ABCD$  négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! a)  $\vec{AB} + \vec{CD}$ , b)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ , c)  $\vec{AB} - \vec{AC}$ , d)  $\vec{AB} - \vec{CB}$ , e)  $\vec{AC} + \vec{DB}$ , f)  $\vec{AC} - \vec{DB}$ , g)  $2\vec{AB} + \vec{BD}$

1.6. Tekintsük az  $ABCD$  négyzetet. Jelölje a  $BC$  oldal felezőpontját  $E$ , a  $CD$  oldal felezőpontját  $F$ , a négyzet középpontját  $O$ . Fejezzük ki az egymásra merőleges  $\mathbf{b} = \vec{AB}$  és  $\mathbf{d} = \vec{AD}$  vektorok segítségével az  $\vec{AE}$ ,  $\vec{AF}$ ,  $\vec{AO}$ ,  $\vec{EF}$ ,  $\vec{OF}$  vektorokat!

1.7. Tekintsük az  $ABCD$  tetraédert! Határozzuk meg az

- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$ ,
- $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} - \vec{AD}$ ,
- $\vec{AD} - \vec{AC} - \vec{BD}$

vektorokat.

1.8. Tekintsük a szabályos  $ABCDEF$  hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje  $O$ . Fejezzük ki az  $\mathbf{a} = \vec{OA}$  és  $\mathbf{b} = \vec{OB}$  vektorok segítségével az a)  $\vec{OC}$ , b)  $\vec{OE}$ , c)  $\vec{OF}$ , d)  $\vec{AC}$ , e)  $\vec{BD}$ , f)  $\vec{BF}$ , g)  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF}$  vektorokat!

1.9. Adva van  $n$  tetszőleges, nem feltétlenül különböző  $P_1, P_2, \dots, P_n$  pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n} + \vec{P_nP_1}$$

összeg?

1.10. Mutassuk meg, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok pontosan akkor lehetnek (egy esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege  $\mathbf{0}$ , vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

1.11. Legyen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai  $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$  és  $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

### Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

1.12. **LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.
- Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.
- Megadható a térben három vektor,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$ , hogy  $\mathbf{a}$  független a  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektoroktól, de  $\mathbf{b}$  nem független az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{c}$  vektoroktól.
- Ha három térbeli vektor egy síkba esik, akkor mindegyik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként!

### Speciális lineáris kombinációk

1.13. **SAKASZT  $m : n$  ARÁNYBAN OSZTÓ PONT** Ha az  $\overline{AB}$  szakaszt a  $P$  pont úgy bontja ketté, hogy  $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$ , akkor bármely  $O$  pontra igaz, hogy

$$\vec{OP} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB}.$$

Speciálisan, az  $\overline{AB}$  szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

vektor mutat.

## Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három – vektorok közti – szorzás-művelet visz közelebb. Mindegyik művelet igen szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik: az egyik eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, a másik nem felcserélhető, és kétváltozós (bináris) műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik pedig nem két- hanem háromváltozós művelet.

**Skaláris szorzás** A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha  $\mathbf{F}$  jelöli az erővektort,  $\mathbf{s}$  az elmozdulásvektort,  $\mathbf{F}_s$  az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és  $\gamma$  az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{s}$  vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke  $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \gamma$ . Ez vezet a következő definícióhoz:

**1.15. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA).** Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatát  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  jelöli, tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

ahol a két vektor által bezárt szög  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$ .

Ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, és pedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  skaláris szorzatát  $\mathbf{ab}$ -vel is jelölni, de ezt egy később bevezetendő művelettel (a mátrixszorzással) való összekeverés elkerülése érdekében e könyvben nem fogjuk használni.

**1.16. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA A DEFINÍCIÓ ALAPJÁN).** Mennyi a skaláris szorzata egy 1 és egy 2 egység hosszú és egymással  $60^\circ$ -os szöget bezáró két vektornak?

**MEGOLDÁS.** A szorzat  $1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ . □

**1.17. TÉTEL (MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT?).** Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

**BIZONYÍTÁS.** ( $\Leftarrow$ ) Ha  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , akkor  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \pi/2$ , azaz  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ , tehát  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Ha  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , azaz  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ , akkor  $|\mathbf{a}| = 0$ ,  $|\mathbf{b}| = 0$  vagy  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ . Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektorára merőlegesnek tekinthető. Ha viszont  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{b} \neq$

$\mathbf{0}$ , akkor  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ , a  $\cos$  függvénynek a  $[0, \pi]$  intervallumban csak  $\pi/2$ -ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra.  $\square$

► A tétel bizonyításából látszik, a zérusvektorra úgy tekintünk, mint ami bármely vektorra merőleges. Korábban – a skalárral való szorzásnál – a zérusvektorra úgy tekintettünk, mint ami bármely vektorral párhuzamos, hisz skalárszorosa. A zérusvektorra tehát úgy tekintünk, mint ami egy adott vektorral akkora szöget zár be, mint amekkorára épp szükségünk van. Ezt megtehetjük, hisz a zérusvektor iránya tetszőleges. Ez megóv minket attól, hogy minden tételbe a zérusvektor esetét külön, mint valami rendhagyó esetet bele kelljen fogalmaznunk.

**1.18. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI).** Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és  $r$  tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

- a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (kommutativitás)
- b)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  (disztributivitás)
- c)  $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$
- d)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ , ha  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , és  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ , ha  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Mivel két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése föl sem vehető, hisz az  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  (ld. az 1.18. feladatot).

**Hosszúság és szög** Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges  $\mathbf{a}$  vektorra  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$ , tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy vektor hossza megegyezik az önmagával vett skaláris szorzatának gyökével. Ebből az is adódik, hogy két pont távolsága megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$ , akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a szögük meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \quad (1.2)$$

mivel a  $[0, \pi]$  intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

**Pithagorász-tétel** A távolságot vagy hosszúságot skaláris szorzattal is ki tudjuk fejezni, így segítségével a rá vonatkozó összefüggések is vizsgálhatók.

1.19. TÉTEL (PITHAGORÁSZ-TÉTEL). Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőlegesek egymásra.

**BIZONYÍTÁS.**

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\ &\stackrel{?}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && ? \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

Világos, hogy a ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , azaz ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőlegesek egymásra.  $\square$

1.20. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA). Számítsuk ki az 1.24 ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 egység).

**MEGOLDÁS.** Az  $\mathbf{a}$  vektor hossza  $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ , a  $\mathbf{b}$  vektor hossza  $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ , az  $\mathbf{a}$  vektornak a vízszintes rácsvonalakkal bezárt szöge  $\pi/4$ , a  $\mathbf{b}$  vektornál e szög szögfüggvényei  $\cos \gamma = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \gamma = \frac{3}{5}$ . Így

$$\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \gamma \cos \frac{\pi}{4} - \sin \gamma \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát a skaláris szorzat  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ .  $\square$

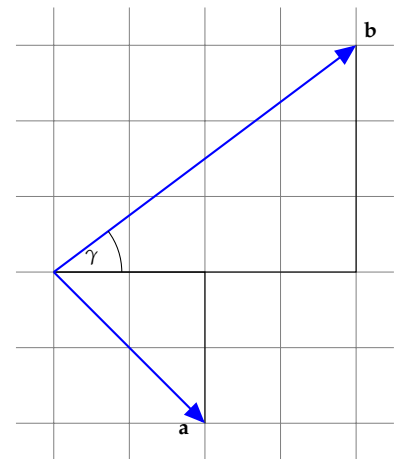
**Két fontos egyenlőtlenség** Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.21. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$



1.24. ábra: Két vektor skaláris szorzata

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. Ennek az az értelme, hogy e bizonyítás változtatás nélkül működni fog sokkal általánosabb körülmények között is.

1.22. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG). *Bármely két  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorra*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

**BIZONYÍTÁS.** Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \quad \text{ld. az 1.19. tétel bizonyítását} \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2. \end{aligned}$$

És ezt akartuk bizonyítani.  $\square$

**Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés** Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha  $\mathbf{a}$  egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor  $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1.$$

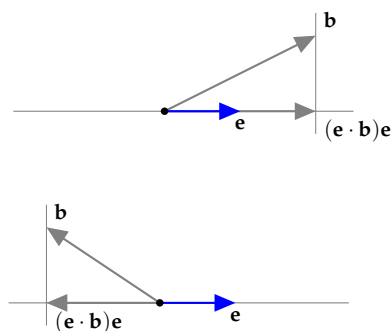
1.23. TÉTEL (EGYSÉGVEKTORRAL VALÓ SZORZÁS GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Ha  $\mathbf{e}$  egységvektor, akkor a  $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$  vektor a  $\mathbf{b}$  vektornak az  $\mathbf{e}$  egyenesére való merőleges vetülete. Az  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$  szorzat  $\mathbf{e}$  vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha  $\hat{\mathbf{b}}$  és  $\mathbf{e}$  egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.*

**BIZONYÍTÁS.** Ha  $\mathbf{e}$  egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{e}, \mathbf{b})$ , ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint  $\mathbf{b}$  merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám  $\mathbf{e}$ -szerese pedig egy  $\mathbf{e}$  irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp  $\mathbf{b}$  vetületi vektora.  $\square$

Jelölje a  $\mathbf{b}$  vektornak az  $\mathbf{a}$  egyenesére eső merőleges vetületi vektorát  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ . Eszerint ha  $\mathbf{e}$  egységvektor, akkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$

Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.



1.25. ábra: Az  $\mathbf{b}$  vektor és az  $\mathbf{e}$  egységvektor egyenesére eső vetülete. A felső ábrán  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} > 0$ , az alsón  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} < 0$ .

**1.24. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE).** Ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  a sík vagy a tér két vektora, és  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , akkor  $\mathbf{b}$ -nek az  $\mathbf{a}$  egyenesére eső merőleges vetülete

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

A  $\mathbf{b}$ -nek az  $\mathbf{a}$  egyenesére merőleges összetevője

$$\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

**BIZONYÍTÁS.** Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.23. tételből következik. Legyen  $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  az  $\mathbf{a}$ -irányú egységvektor. Ekkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{e} = \left( \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ .) Mivel  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{a}$  párhuzamosak, ezért  $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b}$ , ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból adódik, hogy a két összetevő összege  $\mathbf{b}$ .  $\square$

**1.25. PÉLDA (MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS).** Az 1.24 ábrabeli  $\mathbf{b}$  vektort bontjuk fel az  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

**MEGOLDÁS.** Bár a megoldás az 1.27 ábráról is leolvasható, kövessük végig a számítást: az 1.20. példa szerint  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ ,  $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$ , ezért

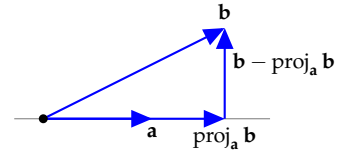
$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{2}{8} \mathbf{a} = \frac{1}{4} \mathbf{a},$$

míg az  $\mathbf{a}$ -ra merőleges összetevő  $\mathbf{b} - \frac{1}{4} \mathbf{a}$ .  $\square$

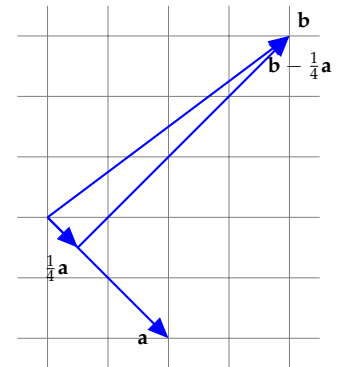
**Merőlegesség és orientáció** Legyenek  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  egymásra merőleges nemzérus vektorok a síkban. Ekkor  $\mathbf{a}$  és  $-\mathbf{b}$  is merőlegesek, azaz  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\perp} = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\perp} = \pi/2$ . Csak az  $\mathbf{a}$  ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a  $\mathbf{b}$  és  $-\mathbf{b}$  vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha  $\mathbf{c}$  merőleges a nem kollineáris  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok mindegyikére, akkor  $-\mathbf{c}$  is. Vajon  $\mathbf{c}$  és  $-\mathbf{c}$  megkülönböztethető-e egymástól csak  $\mathbf{a}$ -hoz és  $\mathbf{b}$ -hez való viszonyukat tekintve?

A válaszhoz az *irányítás*, más szóval *orientáció* fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ??? szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetők (1.28. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor).

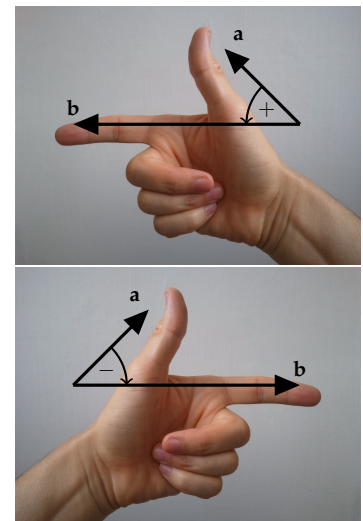
Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három



1.26. ábra: Az  $\mathbf{b}$  vektor felbontása az  $\mathbf{a}$  vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

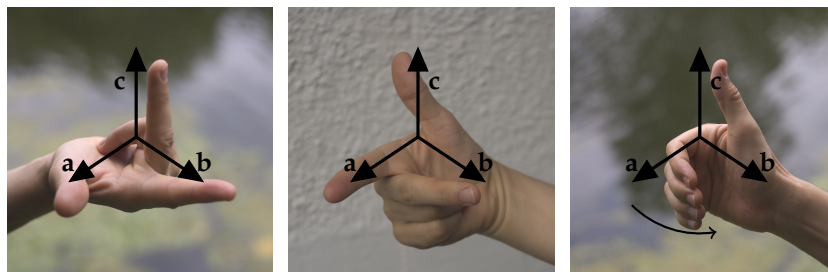


1.27. ábra: Vektor felbontása merőleges összetevőkre

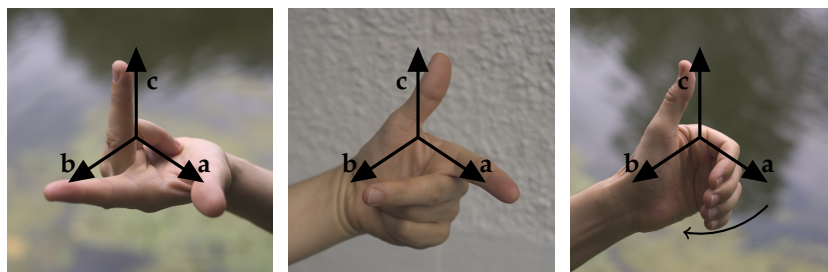


1.28. ábra: Két vektor egymáshoz való viszonya jobbrendszert (felső ábra) vagy balrandszert (alsó ábra) alkot. A közbe zárt irányított szög az előbbi esetben pozitív, utóbbiban negatív.

ujjával szemléltethetőek (1.29. és 1.30. ábra). Kézenfekvőnek tűnik az első vektornak a hüvelyk, a másodiknak a mutató, a harmadiknak a középső ujjunkat megfeleltetni, de azokban a kultúrákban, ahol a mutató és középső ujjal mutatják a kettőt, ott a mutató-középső-hüvelyk a sorrend. Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármast a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. Az 1.29. ábra harmadik képén látható mód (az ökölbe szoruló jobb kéz mozgása) azt is megmutatja, hogy milyen egy egyenes körül való pozitív forgás iránya. A síkban ezt azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívvá, ha jobbrendszert, és negatívvá, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  irányított szögét  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft}$  jelöli. Tehát míg  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\perp} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\perp}$ , addig  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\triangleleft}$ , és ha  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft} = \pi/2$ , akkor  $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\triangleleft} = -\pi/2$ . Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.



1.29. ábra: Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha irányuk a jobb kezünkkel mutatható a mellékelt három ábra bármelyike szerint: (1) hüvelyk-mutató-középső ujj, (2) mutató-középső-hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a  $\mathbf{c}$  vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az  $\mathbf{a}$  felől a  $\mathbf{b}$  felé haladnak.



1.30. ábra: Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak, ha irányuk a bal kezünkkel mutatható a következők bármelyike szerint: (1) hüvelyk-mutató-középső ujj, (2) mutató-középső-hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a  $\mathbf{c}$  vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az  $\mathbf{a}$  felől a  $\mathbf{b}$  felé haladnak.

**Vektori szorzás** A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forgatónyomaték*.

Hasson egy  $\mathbf{F}$  erő egy test  $\mathbf{P}$  pontjában, és legyen a test rögzítve az  $O$  pontjában. A  $P$  ponton átmenő,  $\mathbf{F}$  irányú egyenesnek az  $O$ -tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az  $\mathbf{F}$  hatására a test  $O$  körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük



forgatónyomatéknak –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja  $|\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_{\angle}$ , így az  $\mathbf{M}$  forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_{\angle}.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges  $\mathbf{F}$ -re és  $\vec{OP}$ -re is, csak abban kell megegyezni, hogy az  $\vec{OP}$ ,  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{M}$  vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

A forgatónyomaték és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:

**1.26. DEFINÍCIÓ (VEKTORI SZORZÁS).** A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

► A vektor abszolút értéke tényleg nem negatív, mert a szinusz függvény a  $[0, \pi]$  intervallumon nem negatív.

► E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem tudnánk eldönteni, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor (gondoljuk meg!).

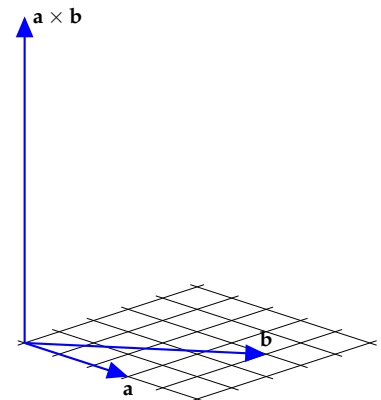
► Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok vektori szorzatát  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ , továbbá  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ .

**1.27. PÉLDA (VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA).** Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza  $\frac{4}{5}$ . Mit tudunk a vektori szorzatról?

**MEGOLDÁS.** Ha  $\cos \gamma = \frac{4}{5}$ , akkor  $\sin \gamma = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$ , így a vektori szorzat hossza  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9$ , iránya merőleges mindkét vektorra és  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.31. ábra). □



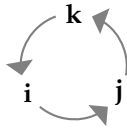
1.31. ábra: Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorok

1.28. PÉLDA (**i, j, k** VEKTORI SZORZATA). Legyen **i, j, k** három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk műveletábrát vektori szorzataikról!

MEGOLDÁS. Mivel  $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_{\angle} = 0$ , ezért  $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$ , így  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ . Hasonlóan  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$  és  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

Mivel  $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$  és  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})_{\angle} = 90^\circ$ , ezért  $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$ , azaz  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  is egységvektor. Ráadásul  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  merőleges **i**-re és **j**-re, és **i, j** valamint  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint **i, j** és **k**. Ebből következik, hogy  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ . Hasonlóképp  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$  és  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ . Ha **i, j, k** jobbrendszert alkot, akkor **j, i** és **k** balrendszert, így  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ . Mindezeket összefoglalva a következő műveletábrát kapjuk.

$\times$	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>i</b>	<b>0</b>	<b>k</b>	<b>-j</b>
<b>j</b>	<b>-k</b>	<b>0</b>	<b>i</b>
<b>k</b>	<b>j</b>	<b>-i</b>	<b>0</b>



E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetők, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor  $-1$ -szerese.  $\square$

1.29. TÉTEL (MIKOR **0** A VEKTORI SZORZAT?). Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

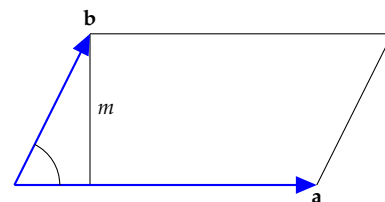
BIZONYÍTÁS. Ha **a** vagy **b** valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

( $\Leftarrow$ ) Ha **a** és **b** párhuzamosak, akkor  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$  vagy  $\pi$ , tehát  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ , így  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$ , azaz  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

( $\Rightarrow$ ) Ha  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , azaz  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ , akkor  $|\mathbf{a}| \neq 0$  és  $|\mathbf{b}| \neq 0$  miatt  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ . A szinusz függvénynek a  $[0, \pi]$  intervallumban a  $0$  és a  $\pi$  helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos.  $\square$

1.30. TÉTEL (VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE). Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

BIZONYÍTÁS. Az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma oldalainak hossza  $|\mathbf{a}|$  és  $|\mathbf{b}|$ , az **a** oldalhoz tartozó magassága pedig  $m = |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$ . A paralelogramma területe  $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  (1.32. ábra).  $\square$



1.32. ábra:  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  megegyezik a paralelogramma területével

1.31. TÉTEL (VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Tetszőleges  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokra, valamint tetszőleges  $r$  valós számra igazak az alábbi összefüggések:*

$$a) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{alternáló tulajdonság})$$

$$b) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{disztributivitás})$$

$$c) \quad r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$$

$$d) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$$

- ▶ E tétel *a)* pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív!*
- ▶ A vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.28. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis  $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ , másrészt  $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

- ▶ A tétel bizonyítását az 1.32. feladatra hagyjuk.

*Parallelepipedon térfogata és előjeles térfogata* Az 1.30. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területét adja. Hogy számítható ki a paralelepipedon térfogata?

1.32. PÉLDA (PARALLELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Határozzuk meg az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!*

**MEGOLDÁS.** Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  által kifeszített paralelogramma területe  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ , és mivel  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a paralelepipedon magassága  $\mathbf{c}$ -nek az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő. Ez az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság  $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$ , és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Tehát a paralelepipedon térfogata  $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ . □

- ▶ A  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  skalárt az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.
- ▶ Ez pontosan akkor negatív, ha a  $\mathbf{c}$  vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  egyenesére eső merőleges vetülete és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ellenkező irányú. Vagyis ha a  $\mathbf{c}$  vektor az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  síkjának másik oldalán van, mint az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor, azaz ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  balrendszert alkot! Tehát e skalár előjele a három vektor orientációját adja.

► A három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ .

**Vegyes szorzat** Az előző paragrafusban megmutattuk az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.33. DEFINÍCIÓ (VEGYES SZORZAT). A 3-dimenziós tér három tetszőleges  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorából képzett

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor vegyes szorzatának nevezzük.

- A vegyes szorzat eredménye skalár.
- Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok vegyes szorzatának szokás jelölése  $\mathbf{abc}$ , de mi a későbbi fejezetekben nem fogjuk használni.
- Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .
- A paralelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelükben térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Az ellenkező előjelű szorzatok:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Ezeket a vegyes szorzatra használt jelöléssel fölírva:

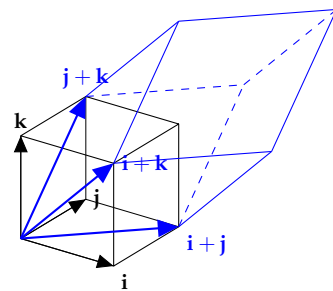
$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

1.34. PÉLDA (VEGYES SZORZAT). Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát (1.33 ábra)!

**MEGOLDÁS.** Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$ . E három vektor ebben a sorrendben alkotson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint  $\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = 1$ ,  $\mathbf{kji} = \mathbf{jik} = \mathbf{ikj} = -1$ . Mivel a vegyes szorzat egy paralelepipedon térfogatát vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Például  $\mathbf{iji} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ . A három lapátló-vektor:  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} + \mathbf{i}$ . Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned} ((\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{i}) &= \mathbf{ijk} + \mathbf{iji} + \mathbf{ikk} + \mathbf{iki} + \mathbf{jjk} + \mathbf{jji} + \mathbf{jkk} + \mathbf{jki} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= 2, \end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. Ez azt is jelenti, hogy e három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata 2.  $\square$



1.33. ábra:  $(\mathbf{i} + \mathbf{j})(\mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{k} + \mathbf{i}) = 2$

## Feladatok

### Skaláris szorzás

A következő feladatokban megadott adatok alapján számítsuk ki az  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  skaláris szorzatot! Legyen  $\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$ .

1.14.  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

1.15.  $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}, |\mathbf{b}| = 2, \gamma = \frac{3\pi}{4}$ .

1.16.  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, \gamma = \pi$ .

1.17.  $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}, |\mathbf{b}| = 2, \gamma = \frac{\pi}{2}$ .

1.18. Igazoljuk, hogy általában

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

1.19. **SKALÁRIS SZORZÁS: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Két egységvektor skaláris szorzata  $-1$  és  $+1$  közé eső szám.
- Egy  $\mathbf{v}$  vektor szorzata egy egységvektorral megegyezik  $\mathbf{v}$ -nek az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületével.
- A skaláris szorzás kommutatív.
- A skaláris szorzás asszociatív (ld. 1.18. feladat).
- A nullvektor bármely vektorra merőleges.
- Két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

Egyszerűsítsük az alábbi két kifejezést!

1.20.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

1.21.  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

1.22. Mennyi az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  szöge, ha  $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5$ .

1.23. Igaz-e, hogy  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$  pontosan akkor áll fenn, ha  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  három egymásra páronként merőleges vektor?

1.24. Határozzuk meg az  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  értékét, ha  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  és  $\mathbf{e}_3$  egységvektorok és  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ .

### Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás

1.25. Számítsuk ki  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  értékét, ha  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \frac{\pi}{6}$ .

1.26. Számítsuk ki  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  értékét, ha  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \pi$ .

Egyszerűsítsük az alábbi két kifejezést!

1.27.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

1.28.  $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

1.29. Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje  $P$ . Számítsuk ki a  $P$ -ből induló

- valamelyik két lapátló-vektor,

- egyik lapátló- és a testátló-vektor

skaláris szorzatát, valamint a  $P$ -ből induló

- valamelyik élvektor és egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,
- valamelyik élvektor és a vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor vektori szorzatát.

1.30. Mutassuk meg, hogy ha  $\mathbf{u}$  merőleges a  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

1.31. Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

1.32. Igazoljuk az 1.31. tétel állításait!

1.33. **SZÖGFELEZŐ** Legyenek  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a  $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$  vektor felezi a  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  szögét!

1.34. **HÁROMSZÖG SZÖGFELEZŐJE** Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

1.35. **MIT CSERÉL FÖL A TÜKÖR?** Hogy lehet az, hogy a tükör fölcseréli a jobbat a ballal, de nem cseréli föl a föntet a lenttel?

### Projekt: ekvivalencia reláció

Egy  $X$  halmazon értelmezett (bináris) reláción az  $X$  elem-párjainak egy  $R$  halmazát értjük. Ha egy  $(a, b)$  pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy  $a$  az  $R$  relációban van  $b$ -vel, és úgy jelöljük, hogy  $a R b$ . Például, ha  $X$  az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan  $(a, b)$  emberpár halmaza, ahol  $a$  anyja  $b$ -nek, egy reláció (anya-gyermek reláció). Ha  $X$  a valósok halmaza, és  $R$  azokból az  $(a, b)$  párokból áll, melyekre  $a$  kisebb vagy egyenlő mint  $b$ , akkor  $R$  egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezünk. E reláció szokásos jele  $\leq$ , így ha  $(a, b) \in R$ , akkor az  $a \leq b$  jelölést használjuk.

Egy halmaz diszjunkt részhalmazok uniójára való felbontását szokás  $s$  halmaz elemei osztályozásának (particionálásának) nevezni. Egy ilyen osztályozáshoz természetes módon hozzárendelhető egy reláció, melyet a halmazon értelmezett ekvivalencia relációnak nevezünk, és amelyben két elem pontosan akkor van relációban (pontosan akkor ekvivalensek), ha azonos osztályba tartoznak. Kérdés, egy relációról hogyan állapítható meg, hogy ekvivalenciareláció-e?

**1.35. TÉTEL (EKVIVALENCIARELÁCIÓ).** Legyen  $R$  egy tetszőleges reláció az  $X$  halmazon.  $R$  pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha tetszőleges  $a, b, c \in X$  elemre fennáll az alábbi három tulajdonság:

- a)  $R$  reflexív, azaz  $a R a$ , vagyis minden elem relációban van önmagával,
- b)  $R$  szimmetrikus, azaz ha  $a R b$ , akkor  $b R a$ ,
- c)  $R$  tranzitív, azaz ha  $a R b$  és  $b R c$ , akkor  $a R c$ .

**1.36.** Legyen  $R$  a fenti tétel szerinti reláció, és jelölje  $R_a$  az  $a$ -val relációban lévő elemek halmazát. Mutassuk meg,

hogy bármely két  $a, b \in X$  elemre  $R_a$  és  $R_b$  vagy azonos, vagy diszjunkt. Ezzel bizonyítsuk az előző tételt!

**1.37. SZABAD VEKTOR FOGALMA** Mutassuk meg, hogy a 3-dimenziós tér szabad vektorai definiálhatók egy – az irányított szakaszok halmazán értelmezett – ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályaival. Mi ez a reláció?

**1.38. VEKTOR IRÁNYA** Milyen halmazon értelmezett ekvivalenciareláció segítségével definiálható a vektor irányának és állásának fogalma?

## Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

**Descartes-féle koordinátarendszer** Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebraival. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/szám párok/számhármak között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

Az 1.11. tétel szerint a sík bármely  $\mathbf{v}$  vektora felírható két adott lineárisan független  $\mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{e}_2$  vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$  alakú, akkor a  $\mathbf{v}$  vektorhoz a  $(v_1, v_2)$  számpárt rendeljük, és ezt a  $\mathbf{v}$  vektor *koordinátás alakjának*, a  $v_1$  és  $v_2$  skalárokat pedig a  $\mathbf{v}$  *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  vektorpár e koordinátázási rendszer – egyszerűbben *koordinátarendszer* – *bázisa*, az  $\mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{e}_2$  vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.

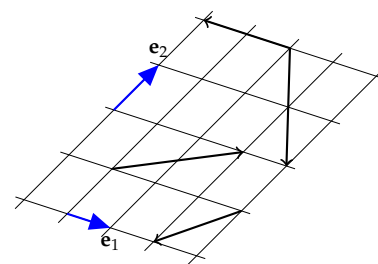
1.36. PÉLDA (VEKTOROK KOORDINÁTÁI). Határozzuk meg az 1.34. ábrán megadott vektoroknak – az  $\mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{e}_2$  vektorokra, mint bázisra vonatkozó – koordinátáit!

**MEGOLDÁS.** A megoldás könnyen leolvasható az 1.35. ábráról. Áttekinthetőbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk. Ezt mutatja az 1.36. ábra. □

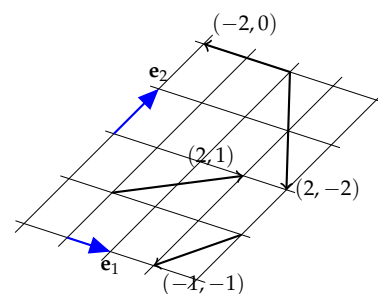
A koordinátarendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely  $\mathbf{v}$  vektora felírható három adott lineárisan független  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  és  $\mathbf{e}_3$  vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$  alakú, akkor a  $\mathbf{v}$  vektorhoz a  $(v_1, v_2, v_3)$  számhármast rendeljük, és ezt a  $\mathbf{v}$  vektor *koordinátás alakjának*, a  $v_1$ ,  $v_2$  és  $v_3$  skalárokat pedig a  $\mathbf{v}$  *koordinátáinak* nevezzük. *Bázis* az  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  vektorhármak.

Sőt, a koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha  $\mathbf{e}$  egy nemnulla vektor (tehát lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos  $\mathbf{v}$  vektor egyértelműen felírható  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$  alakban. E  $v$  skalár lesz a  $\mathbf{v}$  koordinátás alakja (a zárójel használata

René Descartes (*Renatus Cartesius*) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a pusztá hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartes-i kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.



1.34. ábra: Milyen a vektorok koordinátái?



1.35. ábra: A megoldás

itt szükségtelen). Így a  $v \leftrightarrow v$  hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a vektorok és a skalárok közt.

Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.

**1.37. PÉLDA (PONTOK KOORDINÁTÁI).** Határozzuk meg az 1.37. ábrán kijelölt pontok – megadott bázisvektorokra és origóra vonatkozó – koordinátáit!

**MEGOLDÁS.** E feladat megoldása lényegében azonos az előzőével, mint hogy a kijelölt pontokba mutató helyvektorok megegyeznek az ott megadott vektorokkal (ld. 1.38. ábra). □

A helyvektorok és a pontok közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a jelölésben is kifejezzük azzal, hogy nem teszünk különbséget a vektor és a pont koordinátás alakja közt, azaz a  $v = (a, b)$  vektorhoz adott origó mellett rendelt pontot is  $(a, b)$  jelöli. Ha a pontnak nevet is adunk, pl. e pont a  $P$  pont, akkor a  $P(a, b)$  jelölés a nevet és a koordinátákat is megadja. Ekkor a helyvektort  $\vec{OP}$  is jelölheti. Tehát  $v = \vec{OP}$ . Szokás a vektorok koordinátás alakját úgynevezett *oszlopvektor* alakba is írni, mi e könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk, például:

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

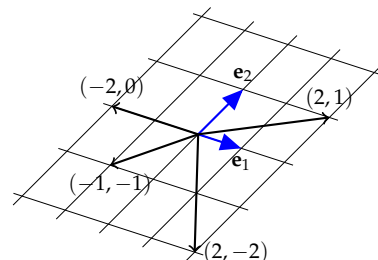
E jelölés előnyeivel hamarosan találkozunk.

Látható, hogy ha egy pont az első tengelyen van, és azon az egyenesen  $x$  az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja  $(x, 0)$  lesz. Hasonlóképp a második tengely minden pontjának  $(0, y)$  a koordinátás alakja. Az origóé  $(0, 0)$  (ld. 1.39. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja  $e_1 = (1, 0)$  és  $e_2 = (0, 1)$ .

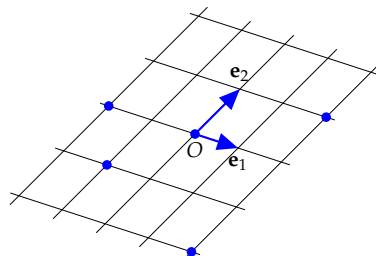
Hasonlóképp a 3-dimenziós esetben a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$ , illetve  $(0, 0, z)$  attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. Az origón átmenő és 2 tengelyt tartalmazó síkokat *koordinátasíkoknak* nevezzük. Ezekből is három van. Könnyen látható, hogy a koordinátasíkok pontjainak alakja  $(x, y, 0)$ ,  $(x, 0, z)$ , illetve  $(0, y, z)$ . Az origóé  $(0, 0, 0)$ , míg az alapvektoroké  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  (ld. 1.40. ábra).

**Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal** Legyen adva a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges  $u = (u_1, u_2, u_3)$  és  $v = (v_1, v_2, v_3)$  vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $cu$ ,  $u \cdot v$ ,  $u \times v$  koordinátás alakja.

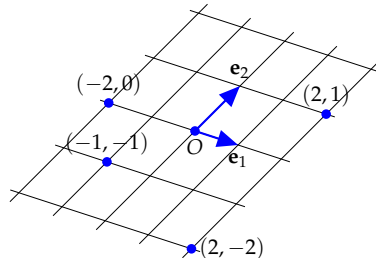
Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok



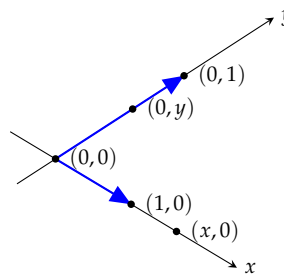
1.36. ábra: A megoldás helyvektorokkal ábrázolva.



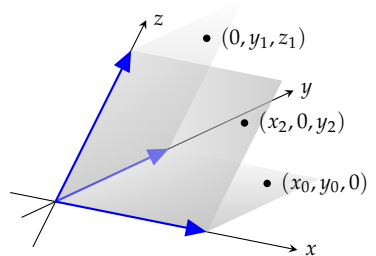
1.37. ábra: Mik a pontok koordinátái?



1.38. ábra: Pontok és koordinátáik



1.39. ábra: Pontok a koordinátarendszer tengelyein.



1.40. ábra: Pontok a koordinátasíkokon



lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrehajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\ &= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3 \\ &= (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

**1.38. ÁLLÍTÁS (VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA).** *Adva van a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor, valamint egy tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Látni fogjuk, hogy a skaláris szorzás koordinátás alakja függ a koordinátarendszertől.

**1.39. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTARENDSZERBEN).** *Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög  $\pi/3$ . Számítsuk ki az  $\mathbf{a} = (1, 1)$  és a  $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$  vektorok skaláris szorzatát.*

**MEGOLDÁS.** Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\right) \\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra (ld. az 1.41. ábrát).

Érdekességként meghatározzuk e koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2. \end{aligned} \quad \square$$

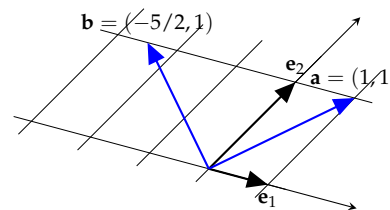
**A derékszögű koordinátarendszer** A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordinátarendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormálnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszert választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban gyakran  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , térben  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordinátarendszer alapvektorai ortonormáltak.

**1.40. ÁLLÍTÁS (SKALÁRIS SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN).** A síkbeli  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , illetve a térbeli  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$



1.41. ábra: Két vektor skaláris szorzata

**BIZONYÍTÁS.** A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$  és  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható.  $\square$

**1.41. ÁLLÍTÁS (VEKTORI SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN).** A térbeli  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  vektorok vektori szorzata derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

► Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  koordinátáinak könnyű memorizálására két sémát mutatunk a széljegyzetben.

**BIZONYÍTÁS.** Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.28. példában. Kihasználva, hogy  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ , ..., a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_2 b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1 b_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2 b_1 \mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= a_2 b_3 \mathbf{i} - a_3 b_2 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_1 b_3 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_2 b_1 \mathbf{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned} \quad \square$$

**1.42. PÉLDA (PARALLELOGRAMMA TERÜLETE).** Mutassuk meg, hogy az  $(a, b)$  és  $(c, d)$  vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$|ad - bc|.$$

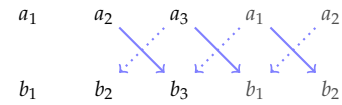
Mi a jelentése az  $ad - bc$  előjelének?

**MEGOLDÁS.** Két 3-dimenziós vektor által kifeszített paralelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ággyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátságjába, tekintsük például az  $(a, b, 0)$  és  $(c, d, 0)$  vektorokat. Vektori szorzatuk

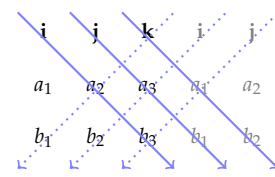
$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke  $|ad - bc|$ .

Mivel az  $(a, b, 0)$ ,  $(c, d, 0)$  és  $(0, 0, ad - bc)$  vektorok jobbrendszer alkotnak, ezért  $ad - bc$  pontosan akkor pozitív, ha a síkban az  $(a, b)$  és  $(c, d)$  vektorok jobbrendszer alkotnak, és  $ad - bc$  pontosan akkor negatív, ha az  $(a, b)$  és  $(c, d)$  vektorok balrendszer alkotnak (gondoljuk meg!).  $\square$



$$a) (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$



$$b) (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

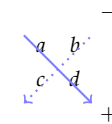
1.42. ábra: A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból:

a) Írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyíl pároknál a  $\searrow$  nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a  $\swarrow$  szerinti szorzatot. Az eredmény:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

b) Írjuk a két vektor koordinátái föl az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vektorokat, majd az előzőhöz hasonlóan másoljuk e táblázat után az első két oszlopot, végül a  $\searrow$  nyíl menti szorzatokból vonjuk ki a  $\swarrow$  menti szorzatokat. Megjegyezzük, hogy e séma a később tanuló determinánsok kiszámítására emlékeztet, formálisan föl is szokás írni a determinánsokat jelölő függőleges zárójelek segítségével:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$



1.43. ábra: A paralelogramma előjeles területe  $ad - bc$ , melynek memorizálására a fenti séma használatos. Ez megegyezik két 2-dimenziós vektor – később tanuló – determinánsával, melyet úgy jelöljük, hogy a két vektor koordinátáiból képzett táblázatot függőleges zárójelek közé zárjuk:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Vigyázzunk, e jel nem az abszolút értéket jelöli, ahhoz egy további zárójelpár szükséges, azaz

$$|ad - bc| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|.$$

1.43. PÉLDA (PARALELEPIPEDON TÉRFOGATA). Mutassuk meg, hogy az  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  és  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata

$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

Mi a jelentése az  $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$  előjelének?

MEGOLDÁS. Az 1.32. példában láttuk, hogy a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata  $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ , amit a koordinátás alakból kiszámolhatunk:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \quad \square$$

**Az  $\mathbb{R}^n$  halmaz** Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám- $n$ -essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám- $n$ -eseket egy  $n$ -dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának  $n$  dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

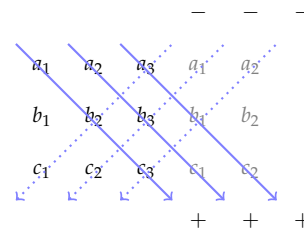
1.44. DEFINÍCIÓ. Egy tetszőleges  $H$  halmaz elemeiből képzett rendezett elem- $n$ -esek halmazát  $H^n$ -nel jelöljük.

Például ha  $H = \{0,1\}$ , akkor  $H^3$  a  $H$  elemeiből képzett rendezett elemhármassok halmaza, azaz:

$$\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

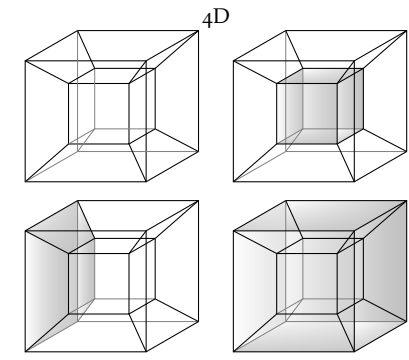
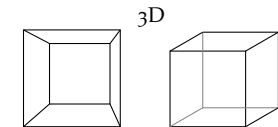
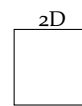
A fenti jelölésnek megfelelően  $\mathbb{R}^n$  a valós számokból képzett rendezett szám- $n$ -esek halmazát jelöli. Eszerint a sík pontjait és vektorait  $\mathbb{R}^2$ , a térét  $\mathbb{R}^3$  elemeivel koordinátáztuk. Később  $\mathbb{R}^n$  elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és  $\mathbb{R}^n$ -ről, mint vektorterről fogunk beszélni. Hasonlóképp,  $\mathbb{R}^n$ -t geometriai vagy ponttérnek fogjuk tekinteni, ha elemeire, mint pontokra gondolunk, és köztük geometriai műveleteket végezzünk. E sokféleség sosem fog gondot okozni:  $\mathbb{R}^n$  szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám- $n$ -esekkel.

Az  $\mathbb{R}^n$  megismerésében az analógia fonálán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani  $n$  dimenzióra. Ez



1.44. ábra: A paralelepipedon térfogata megegyezik az azt kifeszítő három vektor vegyes szorzatának abszolút értékével. A vektori szorzáshoz használt séma itt is működik: a három vektort egymás alá írjuk, az így kapott táblázat első két oszlopát utána másoljuk, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból kivonjuk a ↙ menti szorzatokat. A később tanuló determinánsokra használt jelöléssel tehát a paralelepipedon előjeles térfogata:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



1.45. ábra: 4-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban. A 0-dimenziós „kocka” egyetlen pontból áll, az 1-dimenziós kockát két 0-dimenziós határolja, azaz ez egy szakasz. A 2-dimenziós „kockát”, azaz a négyzetet minden tengelyirányból két-két egybevágó 1-dimenziós „kocka” határolja (azaz összesen négy), míg a 3-dimenziós kockát minden tengelyirányból két-két négyzet (azaz összesen hat). A 3-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban csak a határoló négyzetek torzításával oldható meg. A 4-dimenziós kockát mind a négy tengelyirányból két-két 3-dimenziós kocka határolja, összesen nyolc. Az ábrán három ilyen 3-dimenziós kockát kiszíneztünk.

az analógia fog segíteni abban, hogy valamit „lássunk”  $n$  dimenzióban is (ha nem is olyan jól, mint 3 dimenzióban). Példaként az analógiára egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.45. ábrán.

**Vektorok összeadása és skalárral szorzása  $\mathbb{R}^n$ -ben** A 2- és 3-dimenziós vektorok műveleteinek koordinátás alakja az összeadás, kivonás és skalárral szorzás esetén analóg módon átvihető az  $n$ -dimenziós vektorokra.

**1.45. DEFINÍCIÓ (VEKTORMŰVELETEK  $\mathbb{R}^n$ -BEN).** Legyen  $c \in \mathbb{R}$  egy tetszőleges valós,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  az  $\mathbb{R}^n$  tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük  $c$ -szeresét a következő képletekkel definiáljuk:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).$$

Összefoglaljuk e műveletek legfontosabb tulajdonságait. Ezekre többször is hivatkozni fogunk a későbbiekben.

**1.46. TÉTEL (AZ ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI).** Legyen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  az  $\mathbb{R}^n$  három tetszőleges vektora, és legyen  $c, d$  két tetszőleges valós, jelölje  $\mathbf{0}$  a  $(0, 0, \dots, 0)$  vektort és  $-\mathbf{u}$  a  $(-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$  vektort. Ekkor

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$+$ művelet nem vezet ki $\mathbb{R}^n$ -ből
b)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	$+$ művelet fölcserélhető (kommutatív)
c)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	csoporthozható (asszociatív)
d)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
e)	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	ellentett vektor
f)	$c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$	$\cdot$ szorzás nem vezet ki $\mathbb{R}^n$ -ből
g)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	$\cdot$ két szorzás kompatibilis
h)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
i)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív
j)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel

E tíz tulajdonság később kitüntetett szerepet fog játszani, ezért elkülönítjük a további felsorolandóktól:

- 1)  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 2)  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
- 3)  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$
- 4) a skalár hátra is írható, azaz  $c\mathbf{u} = \mathbf{uc}$  és így  $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$

► E tulajdonságok mindegyike könnyen visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira, ezért ezek ellenőrzését (bizonyítását) az

Olvasóra hagyjuk. Mintaként megmutatjuk a *b)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}.\end{aligned}$$

► Az *a)–e)* tulajdonságok az összeadás, az *f)–j)* tulajdonságok a skalárral szorzás tulajdonságait írják le. Mindkét csoport első tulajdonsága csak annyit mond, hogy a művelet eredménye is ugyanabba a vektorhalmazba, azaz  $\mathbb{R}^n$ -be esik, ahová a műveletben szereplő vektor való.

1.47. PÉLDA. Mutassuk meg, hogy az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  vektorok lineárisan függetlenek, és hogy  $\mathbb{R}^n$  minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!

**MEGOLDÁS.** Az  $\mathbf{e}_1$  biztosan nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz a többi vektor első koordinátája 0, így azok bármely lineáris kombinációjában is 0 az első koordináta,  $\mathbf{e}_1$ -ben pedig 1. Hasonlóan igazolható, hogy egyik  $\mathbf{e}_i$  sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként ( $i = 2, 3, \dots, n$ ). A megadott vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Mivel az  $i$ -edik koordináta egyedül csak az  $\mathbf{e}_i$  vektorban 1, a többiben 0, ezért ha egy tetszőleges  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vektor előáll az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  vektorok lineáris kombinációjaként, akkor abban  $\mathbf{e}_i$  együtthatója csak  $v_i$  lehet. Másrészt az is világos, hogy

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n.$$

Ezzel igazoltuk, hogy  $\mathbb{R}^n$  minden vektora egyértelműen áll elő az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  vektorok lineáris kombinációjaként.  $\square$

*Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség* Hiába definiáltuk vektorok lineáris függetlenségének fogalmát tetszőleges számú vektorból álló vektorhalmazra, láttuk, hogy a 3-dimenziós térben legföljebb csak 3 vektor lehet lineárisan független. Viszont az  $\mathbb{R}^n$  térben találtunk  $n$  lineárisan független vektort is.

Az 1.10. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora *egyértelműen* előáll lineáris kombinációjuként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: a három vektor nullákkal vett lineáris kombinációjaként. Ezt nevezzük a nullvektor

triviális előállításának. A fentiek szerint más előállítása nincs is, ha a három vektor lineárisan független. Ez az alapja a következő tételnek:

**1.48. TÉTEL (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG).** Tetszőleges  $\mathbb{R}^n$ -beli  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1.  $\mathcal{V}$  lineárisan független, azaz  $k > 1$  esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként,  $k = 1$  esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő  $\mathcal{V}$  lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a  $c_1, c_2, \dots, c_k$  skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

**BIZONYÍTÁS.** Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen  $\mathbf{v}$  vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineárisan független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a  $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$  csak  $c = 0$  esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  és  $c \neq 0$ , akkor  $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll. A következőkben kontrapozícióval bizonyítunk, azaz az  $A \Rightarrow B$  állítást a vele ekvivalens  $\neg B \Rightarrow \neg A$  állítással igazoljuk.

( $\Leftarrow$ ) Megmutatjuk, hogy ha  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$  csak  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$  esetén állhat fenn, akkor semelyik  $\mathbf{v}_i$  vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Tegyük fel, hogy valamelyik vektor – például a  $\mathbf{v}_1$  – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel  $\mathbf{v}_1$  együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációjaként, melyben nem minden együttható 0.

( $\Rightarrow$ ) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a  $c_1$  – nem 0, akkor  $\mathbf{v}_1$  kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást.  $\square$

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus. A lineáris összefüggőség definíciója kicsit élesíthető:

**1.49. TÉTEL (LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG).** *Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű  $\mathbb{R}^n$ -beli  $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan  $t \geq 2$  index, hogy  $\mathbf{v}_t$  a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{t-1}$  vektorok lineáris kombinációja.*

Másként fogalmazva, ha egy nullvektort nem tartalmazó vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor olyat is találunk a vektorok bármely sorba rendezése mellett, mely sorrendben csak az őt megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

**BIZONYÍTÁS.** Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer összefüggő, és legyen  $t$  az a legkisebb egész, melyre a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  vektorok már összefüggők. Mivel  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ , ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért  $t \geq 2$ . E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan  $c_i$  konstansok, melyekkel

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy  $c_t \neq 0$ , különben már a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{t-1}$  vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond  $t$  definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \dots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor.

A másik irányú implikáció definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen  $\mathbf{v}_t$  vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak.  $\square$

**Skaláris szorzás  $\mathbb{R}^n$ -ben** A skaláris szorzást először abból az alakból általánosítjuk, amelyet a 2- és 3-dimenziós térben ortonormált bázis esetén láttunk. A tetszőleges bázis esetére való általánosításra később térünk vissza.



1.50. DEFINÍCIÓ (SKALÁRIS SZORZÁS  $\mathbb{R}^n$ -BEN). Legyen  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  az  $\mathbb{R}^n$  tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

A skaláris szorzásnak most csak azokat a tulajdonságait említjük, melyek a későbbi általánosításhoz szükségesek lesznek:

1.51. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). Legyen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{w}$  az  $\mathbb{R}^n$  három tetszőleges vektora, és legyen  $c$  egy tetszőleges valós. Ekkor

- 
- a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  *a művelet fölcserélhető (kommutatív)*  
 b)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  *disztributív*  
 c)  $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  *a két szorzás kompatibilis*  
 d)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  és  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  pontosan akkor teljesül, ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- 

**BIZONYÍTÁS.** A bizonyítás itt is igen egyszerű, ezért csak az a) pontét mutatjuk meg, a többi az Olvasóra hagyjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

**Távolság és szög  $\mathbb{R}^n$ -ben** Két 2- vagy 3-dimenziós vektor (végpontja) távolságának és szögének a skaláris szorzatukkal való kapcsolatát használjuk e fogalmaknak a magasabb dimenziós terekben való definíciójához.

1.52. DEFINÍCIÓ (ABSZOLÚT ÉRTÉK, SZÖG, MERŐLEGESSÉG, TÁVOLSÁG). Legyen  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  az  $\mathbb{R}^n$  tér két tetszőleges vektora.

a) Az  $\mathbf{u}$  vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.3)$$

b) Az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok (hajlás)szögének koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \quad (1.4)$$

c) Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok merőlegesek egymásra, ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.5)$$

d) A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának nevezünk, a

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad (1.6)$$

értéket értjük.

► A fenti definíciókat érdemes megtekinteni koordinátás alakjukba átírva. Eszerint például

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2},$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}}.$$

► A fenti definíciók közül a vektorok hajlásszögének definíciója még hiányos. Egy szög koszinusza csak a  $[-1, 1]$  intervallumba eső szám lehet, ezért e definíció csak akkor értelmes, ha az (1.4) képlet számológépre és nevezőjére igaz, hogy  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ , azaz ha  $n$ -dimenziós vektorokra is fennáll a CBS-egyenlőtlenség. Ezt hamarosan igazolni fogjuk!

1.53. PÉLDA (VEKTOROK SZÖGE ÉS TÁVOLSÁGA). Az  $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$  vektornak mennyi az abszolút értéke, mennyi a  $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$  vektortól való távolsága, és mennyi a  $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$  vektorral bezárt szögének koszinusza?

MEGOLDÁS. A válaszhoz az (1.3), az (1.6) és az (1.4) képleteket használjuk:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}. \quad \square$$

1.54. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). Tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  vektorokra

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|. \quad (1.7)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő. Ha  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , akkor legyen  $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  a  $\mathbf{v}$  irányú egységvektor. Az  $\mathbf{u}$  vektor  $\mathbf{e}$  egyenesére merőleges összetevőjének hossza,

illetve annak négyzete nyilván nem negatív, azaz

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 - 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}, \end{aligned}$$

Innen átrendezéssel azonnal megkapjuk a bizonyítandó állítást. Másrészt az is világos, hogy  $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|$  csak akkor állhat fenn, ha  $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$ , azaz ha  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{e}$  párhuzamosak, azaz ha  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  skalárszorosa, vagyis ha a két vektor lineárisan összefüggő.  $\square$

1.55. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG  $\mathbb{R}^n$ -BEN). *Tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  vektorokra*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

A bizonyítás megegyezik a 3-dimenziós változatra, azaz az 1.22. tételre adott bizonyítással.

A vektor abszolút értékét a skaláris szorzat segítségével definiáltuk, de fordítva, a skaláris szorzat is kifejezhető a vektor abszolút értékével.

1.56. TÉTEL (SKALÁRIS SZORZAT ÉS ABSZOLÚT ÉRTÉK  $\mathbb{R}^n$ -BEN). *Tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  vektorokra*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) \quad (1.9)$$

**BIZONYÍTÁS.** A bizonyításban az abszolút érték (1.3)-beli definícióját használjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2) &= \frac{1}{4} ((\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{4} (4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható.  $\square$

Végül egy fontos összefüggés az ortogonális vektorrendszerekről:

1.57. ÁLLÍTÁS (ORTOGONÁLIS VEKTORRENDSZER LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE). *Tegyük fel, hogy a zérusvektortól különböző  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  vektorok páronként ortogonálisak, azaz bármely  $i \neq j$  esetén  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ . Ekkor  $e$  vektorok lineárisan függetlenek.*

**BIZONYÍTÁS.** Tegyük fel, hogy valamely  $c_1, c_2, \dots, c_k$  konstansokra

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan a  $\mathbf{v}_i$  vektorral. Mivel  $i \neq j$  esetén  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ , ezért azt kapjuk, hogy

$$c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

amiből  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$  miatt következik, hogy  $c_i = 0$ . Mivel ez minden  $i = 1, 2, \dots, k$  indexre igaz, ezért a vektorok valóban lineárisan függetlenek.  $\square$

► Ha e vektorok az  $\mathbb{R}^n$  tér vektorai, akkor felvetődik a kérdés, hogy mi  $k$  és  $n$  viszonya. Később látni fogjuk, hogy  $k \leq n$ .

► Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy bármely független vektorrendszerből kiindulva megkonstruálható egy vele azonos elemszámú ortogonális vektorrendszer. A műszaki alkalmazásokban is gyakori, hogy egy meglévő alapvektorrendszerből egy ortogonális, majd abból egy ortonormált vektorrendszert konstruálunk.

**Korrelációs együttható\*** Az  $n$ -dimenziós térben szerzett friss szemléletünk segítségünkre lesz egy fontos fogalom megértésében.

Adva van két adatsor:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  és  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Átlagukat jelölje  $\bar{x}$ , illetve  $\bar{y}$ , azaz

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Az  $r$ -rel jelölt ún. *korrelációs együttható* azt méri, hogy a két adatsor közti lineáris függvénykapcsolat milyen erős. Az erre használt képlet a következő:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Vajon hogyan méri  $r$  a lineáris függvénykapcsolat erősségét?

Tegyük fel, hogy a két adatsor közt fönnáll az  $y_i = cx_i + d$  lineáris függvénykapcsolat minden  $i = 1, 2, \dots, n$  indexre valamely  $c, d$  konstansokkal. Ha mindkét adatsorból levonjuk az átlagukat (más szóval a két adatsort *normáljuk*), akkor az így kapott

$$a_i = x_i - \bar{x}, \quad b_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

adatsorokra igaz a  $b_i = ca_i$  összefüggés. Ugyanis

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n cx_i + d \right) = c\bar{x} + d,$$

amiből  $b_i = y_i - \bar{y} = cx_i + d - c\bar{x} - d = c(x_i - \bar{x}) = ca_i$ .

Tehát az  $y_i = cx_i + d$  lineáris függvénykapcsolat pontosan akkor áll fenn, ha a normált adatsorokra  $b_i = ca_i$ . Az adatsorokat  $n$ -dimenziós vektorokba foglalva ez azzal ekvivalens, hogy  $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ , azaz ha e vektorok kollineárisak. A korrelációs együttható nem más, mint e két utóbbi vektor szögének koszinusza, ugyanis

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = r. \end{aligned}$$

Valóban, a két vektor szögének koszinusza pontosan akkor 1, ha a vektorok szöge 0, és akkor  $-1$ , ha a szög  $\pi$ . A korreláció tehát  $-1$  és  $1$  közt változik, és abszolút értéke annál kisebb, minél nagyobb az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok hajlásszöge, azaz minél kevésbé kollineárisak, azaz minél kevésbé erős a két számsorozat közti lineáris függvénykapcsolat.

Ha  $r = 0$ , akkor  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőlegesek, ekkor lineáris függvénykapcsolat nincs az eredeti két mennyiség közt (más kapcsolat még lehet, tehát nem feltétlenül független a két adatsor egymástól valószínűség-számítási értelemben). A fogalom mélyebb megértése a valószínűség-számítás ismeretét is megkívánja, ezzel mi itt nem foglalkozunk.

**Bitvektorok, kódvektorok\*** A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függenek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak.

Az egyszerűség kedvéért a bitvektorokat gyakran a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával adjuk meg, pl. 01110101 a  $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$  vektort jelöli.

A modern számítástechnika számtalan kódot használ, mely bitvektorokkal (is) leírható. Például karakterek kódolására használatos a 7-dimenziós bitvektorokból álló ASCII-kód, a decimális számok kódolására a 4-dimenziós bitvektorokból álló BCD-kód.

Az emberek által is elolvasható kódok gyakran decimális számokból állnak. Például az emberek azonosítására használt *személyi szám* egy olyan vektornak tekinthető, amelynek koordinátái a 10-elemű  $\{0, 1, \dots, 9\}$  halmazból valók.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kód-

*Bit:* az angol *binary digit* kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Az ASCII-kód eredendően az angol nyelvű szövegek kódolására tervezett 8-hosszú bináris kód (azaz 1 bájtos). Az angol nyelv betűi, írásjelei, és néhány számítógépet vezérlő karakter mindegyikének egy olyan vektor felel meg, melynek első koordinátája 0. Tehát a lehetséges 256 darab 8-hosszú vektorból 128 tartozik a kódba. Pl. a „z” betű ASCII-kódja 01111010, decimális alakban 122.

A BCD-kód decimális számok egyik szokásos kódolása, mely a szám kettes számrendszerbe való átírása helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben minden számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1, ..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Így az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. A kettes számrendszerbeli alak 1000110001.

ábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól  $n - 1$ -ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektoroknak* vagy *kódszavaknak* nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű  $\{0, 1\}$  halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám tehát egy 10-elemű ábécéből képzett 11-hosszú kódszó. Nem minden 11-hosszú decimális vektor lehet személyi szám, mert az utolsó koordináta egy ellenőrző jegy, vagyis a személyi szám, mint kód, matematikailag a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazaként írható le. Ezért általában a kódábécé betűiből képzett vektorok részhalmazait fogjuk kódnak nevezni.

**1.58. DEFINÍCIÓ (KÓD).** A kód egy közös ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza. Kódolás során a kódolandó objektumokhoz kódszavakat rendelünk, dekódolás az ellenkező irányú folyamat.

Főként az információelméletben változó hosszú kódszavak is tartozhatnak egy kódhoz. Mi ilyenekkel nem fogunk foglalkozni, de megemlítjük, hogy a karakterek manapság elterjedt UTF-8 kódolása is ilyen, amelyben egy karakterkódja 8-, 16-, 24- vagy 32-bites lehet.

**Vektorműveletek  $\mathbb{Z}_m^n$ -ben\*** A  $\mathbb{Z}_m$ -re vonatkozó ismereteket a függelékben részletezzük. Az 1.44. definíció szerint  $\mathbb{Z}_m^n$  a  $\mathbb{Z}_m$ -beli  $n$ -hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a  $\mathbb{Z}_m$ -beli műveletekkel az  $\mathbb{R}^n$ -beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

**1.59. PÉLDA (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ  $\mathbb{Z}_2^n$ -BEN).** Számítsuk ki a  $\mathbb{Z}_2^5$ -beli

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, 0, 1) \text{ és } \mathbf{c} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját  $\mathbb{Z}_2$ -beli együtthatókkal, valamint a  $\mathbb{Z}_3^3$ -beli

$$\mathbf{u} = (1, 1, 0) \text{ és } \mathbf{v} = (0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját  $\mathbb{Z}_3$ -beli együtthatókkal.

**MEGOLDÁS.** A lehetséges  $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$  alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz  $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$ , vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  eshetőség. Az  $x = y = z = 0$  eset a zérusvektort adja. Ha  $x, y$  és  $z$  közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például  $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$ . Az

összes lineáris kombináció az 1.1. (a) táblázatban látható.

Az  $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$  alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel  $x, y \in \mathbb{Z}_3$ , azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami  $3 \cdot 3 = 9$  lehetőséget ad. Példaként egy lineáris kombináció, a többi az 1.1. (b) táblázatban látható:  $2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = 2(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (2, 2, 0) + (0, 1, 1) = (2, 0, 1)$ .  $\square$

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

**1.60. PÉLDA (ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS).** *Az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezik egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legfölbjebb lehet. Legyen a kulcs  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$ . Legyen a titkosítandó üzenet  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$ . A titkosítás során a küldő kiszámolja az  $\mathbf{u} + \mathbf{k}$  vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$  vektorra  $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ezért  $(\mathbf{u} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} = \mathbf{u} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}) = \mathbf{u}$ , vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet.*

► Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege – a titkosított üzenet – a tömör bitvektor-jelöléssel

az üzenet:  $\mathbf{u} = 010101010000111111111111$

a kulcs:  $\mathbf{k} = 001011000101101001011010$

a titkosított üzenet:  $\mathbf{u} + \mathbf{k} = 011110010101010110100101$

► A bitvektorok ilyen módon való összeadása megegyezik a kizáró vagy nevű logikai művelettel, melyet a XOR szóval (exclusive or), vagy a  $\oplus$  műveleti jellel is szoktak jelölni (ld. ??). példa).

► E titkosítás hátránya, hogy a  $\mathbf{k}$  kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$  és  $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$  üzenetet elcsípve és összeadva az  $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  vektorban már nem szerepel  $\mathbf{k}$ , és ebből statisztikai módszereket is használva már mindkét üzenet kinyerhető.

► Bizonyítható, hogy e kód megfejthetetlen, ha  $\mathbf{k}$  valóban véletlen bitsorozat, és csak egyetlen üzenet titkosítására használjuk.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.59. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. Az 1.39. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy  $n$ -hosszú  $\mathbf{b}$  bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke

$x y z$	$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$	$x y$	$x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$
0 0 0	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0 0	(0, 0, 0)
1 0 0	(1, 0, 0, 1, 1, 0)	1 0	(1, 1, 0)
0 1 0	(0, 1, 0, 1, 0, 1)	2 0	(2, 2, 0)
0 0 1	(0, 0, 1, 0, 1, 1)	0 1	(0, 1, 1)
1 1 0	(1, 1, 0, 0, 1, 1)	1 1	(1, 2, 1)
1 0 1	(1, 0, 1, 1, 0, 1)	2 1	(2, 0, 1)
0 1 1	(0, 1, 1, 1, 1, 0)	0 2	(0, 2, 2)
1 1 1	(1, 1, 1, 0, 0, 0)	1 2	(1, 0, 2)
		2 2	(2, 1, 2)

(a)

(b)

1.1. táblázat: Vektorok lineáris kombinációi (a)  $\mathbb{Z}_2$  és (b)  $\mathbb{Z}_3$  fölött.

1, ha  $\mathbf{b}$ -ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan  $(n + 1)$ -hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát ez az  $(n + 1)$ -edik bit hibajelző. Ezt nevezzük *paritásbitnek*.

1.61. PÉLDA (PARITÁSBIT). *Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként!*

**MEGOLDÁS.** A paritásbit  $\mathbb{Z}_2$  fölött  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$  alakba írható, ahol  $\mathbf{1}$  a  $\mathbf{b}$ -vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor.  $\square$

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből, és az azt követő  $e$  ellenőrző összegből áll. Az  $e$  kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva: } e = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot \mathbf{u},$$

ahol  $\mathbf{u}$  a személyi szám első 10 jegye. A személyi szám 8-10-edik jegyét úgy választják ki, hogy  $e \neq 10$ , így az ellenőrző összeg mindig egyjegyű.

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort  $\mathbf{v}$  jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek (1.46. ábra).

ISBN 978-963-545-398-6



9 789635 453986 >

1.46. ábra: Egy könyv ISBN-13 kódja, ami egyúttal az EAN kódja is. Az EAN-kódhoz tartozik egy vonalkód is. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (korábban az ISBN-szám 10-jegyű volt).



## Feladatok

1.39▲ Az 1.1. (a) táblázatban egy 8 bináris kódszóból, a (b) táblázatban egy 9 ternér kódszóból álló kód kódszavai vannak felsorolva. Határozzuk meg, hogy e kódok hány hiba jelzésére és hány hiba javítására képesek! (Az, hogy egy kód képes  $k$  hibát jelezni, azt jelenti, hogy ha legfőbb  $k$  jelet megváltoztatunk bármelyik kódszóban, akkor egy kódba nem tartozó vektort kapunk. Az, hogy a kód képes  $d$  hibát javítani, azt jelenti, hogy bármely kódszóban legfőbb  $d$  jelet megváltoztatva olyan vektort kapunk, amelyből más kódszó nem kapható meg legfőbb  $d$  jel megváltoz-

tatásával.)

1.40. Mely bitvektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

1.41▲ ELLENŐRZŐ ÖSSZEG Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

1.42▲ 2007 előtt a személyi számhoz hasonló módon számolták ki a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es). A képlet:

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva: } (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot \mathbf{u} = 0$$

ahol  $\mathbf{u}$  a könyv ISBN-kódja, aminek utolsó jegye az ellenőrző összeg. Egy könyv kódjának első 9 jegye 963076198. Mi e könyv teljes ISBN-száma?

## Megoldások

1.1. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

1.2. a) Igaz. b) Hamis, például ha  $O = A$ , akkor  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{AB}$ , míg ha  $O = B$ , akkor  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{BA}$ . c) Igaz, az eredmény  $O$  választásától függetlenül  $\vec{BA}$ . d) Igaz. e) Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. f) Igaz.

$$1.9. \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n} = \vec{P_1P_n}, \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n} + \vec{P_nP_1} = \mathbf{0}.$$

1.12. a) Hamis, lehet, hogy a három közül két vektor egy egyenesbe esik, és a harmadik független tőlük: ez a harmadik nem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. b) Igaz, például  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  ilyenek. De bármely három egy síkba eső nemzérus-vektor ilyen, ha közülük bármely kettő lineárisan független. c) Igaz, például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  és  $\mathbf{a}$  független  $\mathbf{b}$ -től. d) Hamis, például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  és  $\mathbf{a}$  független  $\mathbf{b}$ -től, akkor  $\mathbf{a}$  nem fejezhető ki  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  lineáris kombinációjaként.

1.13. Ha  $|\vec{AP}| : |\vec{PB}| = m : n$ , akkor  $|\vec{AB}| : |\vec{PB}| = (m+n) : n$ , amiből  $\vec{BP} = \frac{n}{m+n} \vec{BA}$ . De  $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP}$  és  $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$ , így  $\vec{OP} = \vec{OB} + \frac{n}{m+n}(\vec{OA} - \vec{OB})$ , amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az  $m = n = 1$  esetben kapjuk, és ekkor valóban  $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$ .

$$1.14. |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$1.15. |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2.$$

$$1.16. 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2.$$

$$1.17. 0, \text{ hisz merőlegesek } (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 0 = 0).$$

1.18. Legyenek  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{c}$  független vektorok,  $\mathbf{b}$  pedig tetszőleges. Ekkor az  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  szorzat párhuzamos a  $\mathbf{c}$  vektorral, míg az  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  szorzat az  $\mathbf{a}$  vektorral, tehát  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ .

1.19. a) igaz, b) hamis, az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének hosszával egyenlő, c) igaz, d) hamis (asszociativitásról nem is lehet szó, mert a két szorzás művelet egyike skaláris szorzás, a másika skalárral való szorzás az  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  szorzatban), e) igaz, f) igaz.

$$1.20. \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$$

$$1.21. \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

1.22. A Pihagorász-tétel következményeként  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  merőlegesek.

1.23. Nem, legyen pl.  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$ .

1.24. Geometriai megoldás: a három egységvektor egy szabályos háromszög három oldalvektora azonos körüljárás szerint irányítva, mivel összegük  $\mathbf{0}$ . Így hajlásszögük  $2\pi/3 = 120^\circ$ , tehát a vektorpárok skaláris szorzata  $-\frac{1}{2}$ , így az összeg  $-\frac{3}{2}$ .

Algebrai megoldás:  $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$ , tehát  $0 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + 2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)$ . Kihasználva, hogy a vektorok egységvektorok, kapjuk hogy  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$ .

$$1.25. |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

1.26.  $\mathbf{0}$ , hisz párhuzamosak ( $\sin \gamma = 0$ , így abszolút értéke 0).

$$1.27. (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

$$1.28. (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \mathbf{i} + \mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{0} + \mathbf{j} - \mathbf{i} = \mathbf{j} - \mathbf{i}.$$

1.29. Jelölje  $P$  szomszédait  $Q$ ,  $R$  és  $S$ .

a) Ekkor két lapátló-vektor például a  $\vec{PQ} + \vec{PR}$  és a  $\vec{PR} + \vec{PS}$  vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned} (\vec{PQ} + \vec{PR}) \cdot (\vec{PR} + \vec{PS}) &= \\ \vec{PQ} \cdot \vec{PR} + \vec{PQ} \cdot \vec{PS} + \vec{PR} \cdot \vec{PR} + \vec{PR} \cdot \vec{PS} &= \\ \vec{PR} \cdot \vec{PR} &= 1. \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor  $(\vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{PS})$  szorzata:

$$(\vec{PQ} + \vec{PR}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{PS}) = \vec{PQ} \cdot \vec{PQ} + \vec{PR} \cdot \vec{PR} = 2.$$

c) A  $Q$ ,  $R$  és  $S$  csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$  és  $\vec{PS}$  ebben a sorrendben jobbról balra alkossanak egy csúcsot. Ki fogjuk használni, hogy ekkor  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{PS}$ . Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times (\vec{PQ} + \vec{PR}) &= \\ \vec{PQ} \times \vec{PQ} + \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \\ \mathbf{0} + \vec{PS} &= \vec{PS}, \end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a  $\vec{PR}$ , a nem szomszédos lapátló-

vektor  $\vec{PR} + \vec{PS}$ . Ezek szorzata:

$$\vec{PQ} \times (\vec{PR} + \vec{PS}) = \\ \vec{PQ} \times \vec{PR} + \vec{PQ} \times \vec{PS} = \vec{PS} - \vec{PR},$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

**1.30.** Ha  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  és  $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ , akkor  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  és  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ , így bármely  $c, d \in \mathbb{R}$  számokra  $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{w}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + d\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$ , tehát  $\mathbf{u}$  merőleges a  $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$  lineáris kombinációra.

**1.31.** Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorhármasok is. A további három esetben, azaz a  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$ , valamint a  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$  és az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$  hármasok esetén balrendszert kapunk a vegyes szorzatról tanultak szerint.

**1.33.** Egyik lehetőség a megoldásra:  $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}\|$ , ezért a paralelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az  $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$  és  $\mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$  két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a paralelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor  $\|\mathbf{a}\|\mathbf{b}\|$ -szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

**1.34.** Használjuk az 1.13. példa eredményét!

**1.35.** Milyen irányokat cserél föl a tükör, és milyeneket nem? Nem cseréli föl a síkkal párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe ön maga. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé” irány a tükörképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? Egy lehetőség a definiálásra: ha értelmezve van egy viszonyítási rendszerben (pl. az emberi testhez képest, vagy a mozgó járműben...) a *föl* és az *előre*, melyek egymásra merőleges irányok, akkor a *jobb* irány az *előre*  $\times$  *föl* vektori szorzattal definiálható. Ennek képe a tükörben viszont  $(-előre) \times föl = -jobb$ , ami

épp a *bal*.

**1.36.** A feladat szerint  $c \in R_a$  pontosan akkor teljesül, ha  $a R c$ . Tegyük fel, hogy  $R_a$  és  $R_b$  nem diszjunkt. Ha  $c$  egy közös elemük, akkor  $c$  az  $a$ -val és  $b$ -vel is relációban van, azaz  $a R c$  és  $b R c$ , de a szimmetria miatt  $c R b$ , a tranzitivitás miatt pedig az  $a R c$  és  $c R b$  relációkból következik az  $a R b$ . Ekkor pedig a tranzitivitást használva bármely  $x$  elemere  $b R x$ -ből következik  $a R x$ , azaz  $x \in R_b$ -ből következik  $x \in R_a$ , azaz  $R_b \subseteq R_a$ . Az  $a$  és  $b$  szerepét megfordítva kapjuk  $R_a \subseteq R_b$ , tehát  $R_a = R_b$ . Végül be kell még látnunk, hogy e halmazok uniója kiadja az egész  $X$  halmazt. Ez igaz, hisz minden  $a$  elemre  $a R a$ , azaz  $a \in R_a$ .

**1.37.** Tekintsünk egy  $\vec{AB}$  és egy  $\vec{CD}$  irányított szakaszt! Azt mondjuk, hogy ezek relációban vannak, ha van egy olyan eltolás, mely  $A$ -t  $C$ -be,  $B$ -t  $D$ -be viszi. E reláció ekvivalenciareláció (ellenőrizzük), így egy osztályozást definiál az irányított szakaszok halmazán. Egy ilyen osztályt nevezzük (szabad) vektornak.

**1.38.** A vektor iránya a félegyenesek, az állása az egyenesek halmazán – az előző feladathoz hasonlóan az eltolással – definiált ekvivalencia reláció egy ekvivalenciaosztálya.

**1.39.** ...

**1.40.** Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem.

**1.41.** Ez a személyi szám érvényes, mert  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot (2, 6, 0, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \pmod{11} = 63 \pmod{11} = 8$ .

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert  $(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot (9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 5) = (9 + 3 \cdot 9 + 9 + 3 \cdot 8 + 8 + 3 \cdot 8 + 7 + 3 \cdot 7 + 7 + 3 \cdot 6 + 6 + 3 \cdot 6 + 5) \pmod{10} = 183 \pmod{10} = 3 \neq 0$ .

**1.42.** Mivel  $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot (9, 6, 3, 0, 7, 6, 1, 9, 8, e) = 10 \cdot 9 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + e = 287 + e \pmod{11} = 1 + e = 0$ , ezért  $e = 10$ , azaz a teljes kód 963076198X (a könyvre olvashatóbban írva 963-07-6198-X).



## 2

# Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

A lineáris egyenletrendszerek geometriai megközelítése után megismerjük a megoldás technikáit, végül a megoldások halmazának szerkezetét!

### Egyenes és sík egyenletei

A sík és a tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

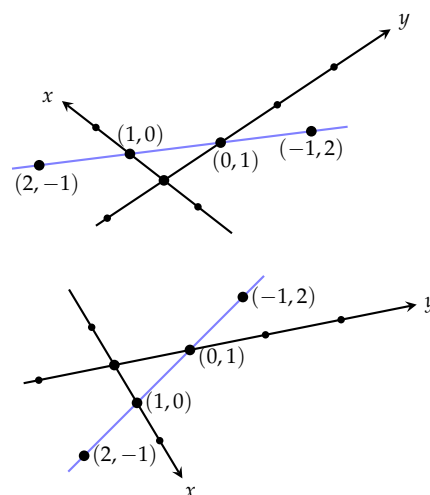
### Alakzatok és egyenletek

**2.1. PÉLDA (AZ  $x + y = 1$  EGYENLET).** Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az  $x + y = 1$  egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

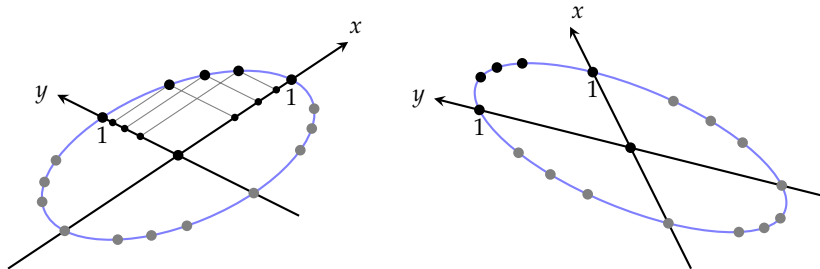
**MEGOLDÁS.** A 2.1 ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az  $x + y = 1$  egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. □

**2.2. PÉLDA (AZ  $x^2 + y^2 = 1$  EGYENLET).** Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

**MEGOLDÁS.** Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. □



2.1. ábra: Az  $x + y = 1$  egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.



2.2. ábra: Az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletet kielégítő  $(x, y)$  pontok halmaza két koordináta-rendszerben.

**2.3. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (IMPLICIT) EGYENLETRENDSZERE).** Egy geometriai alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó (implicit) egyenletrendszerén olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat egyenletéről beszélünk. Az egyenletet vektoregyenletnek nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat  $m$  egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve  $m$  vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a tér egy pontja, és  $\mathbf{r}$  az oda mutató vektor.

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete  $y = x$ , azaz  $x - y = 0$ . Ortonormált bázist választva az origó közepű egységsugarú kör egyenlete  $x^2 + y^2 = 1$ . Az előző két egyenlet mindegyikéből kifejezhető a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az  $y = x$  egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett, rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha... , akkor...” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

**2.4. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (EXPLICIT) EGYENLETRENDSZERE).** Egy geometriai alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó (explicit) egyenletrendszerén olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\&\vdots \\x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k)\end{aligned}$$

ahol  $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2, \dots, t_n \in I_n$ , és  $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ . Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol  $\mathbf{f}$  egy  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás paraméteres egyenletrendszernek is nevezni.

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszerét fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

**Síkbeli egyenes egyenletei** Tekintsük a sík egy tetszőleges  $e$  egyenesét, és jelöljük ki a síkban az  $O$  origót. Legyen a nemzérus  $\mathbf{v}$  egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson  $\mathbf{r}_0$  az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az  $e$  egyenes bármely pontjába mutató  $\mathbf{r}$  vektor előáll  $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  alakban, ahol  $t$  valós szám. Másrészt ha  $Q$  a sík egy tetszőleges, nem az  $e$  egyenesre eső pontja, akkor az  $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$  vektor nem párhuzamos  $\mathbf{v}$ -vel, tehát nem is konstansszoros, azaz  $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$  semmilyen  $t$ -re sem, így  $\overrightarrow{OQ}$  nem áll elő  $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  alakban. Tehát az  $e$  tetszőleges pontjába mutató  $\mathbf{r}$  vektor felírható  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  alakban, és ez csak  $e$  pontjaira igaz.

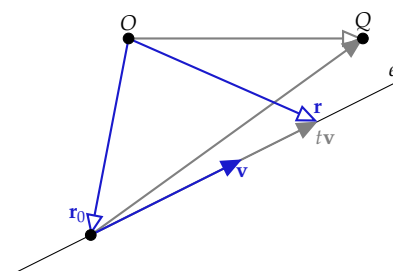
**2.5. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE).** A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol  $\mathbf{v}$  az egyenes egy irányvektora, és  $\mathbf{r}_0$  az egyenes egy tetszőleges, rögzített pontjába mutató vektor.

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektora*

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett, világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejti, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.



2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ .

rainak nevezzük. Legyen  $\mathbf{n}$  egy tetszőleges, a  $\mathbf{v}$ -re merőleges vektor, azaz legyen  $\mathbf{n}$  az  $e$  egy normálvektora. Azt, hogy  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  az  $e$  tetszőleges pontjába mutató  $\mathbf{r}$  vektorra párhuzamos  $\mathbf{v}$ -vel, úgy is kifejezhetjük, hogy  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  merőleges  $\mathbf{n}$ -re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk:  $\mathbf{r}$  pontosan akkor mutat az  $e$  egy pontjába, ha  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ . Ez az egyenlet átrendezés után  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$  alakra, majd a  $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$  jelölés bevezetésével  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$  alakra hozható.

2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.2)$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (2.3)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol  $\mathbf{n}$  az egyenes egy normálvektora,  $\mathbf{r}_0$  az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és  $C$  konstans.

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a  $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$  jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ , akkor találunk olyan  $\mathbf{r}_0$  vektort, melyre  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = C$ . Ez azért igaz, mert ha tetszőleges  $\mathbf{n}$ -re nem merőleges  $\mathbf{v}$  vektorra  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = D$ , akkor  $\mathbf{n} \cdot (\frac{C}{D}\mathbf{v}) = C$ , így az  $\mathbf{r}_0 = \frac{C}{D}\mathbf{v}$  megfelel.

Az  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$  és  $\mathbf{v} = (a, b)$  jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerre alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). A sík minden egyenesének van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \quad (2.4)$$

alakú egyenletrendszere, ahol  $(a, b)$  az egyenes egy irányvektora, és  $(x_0, y_0)$  az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

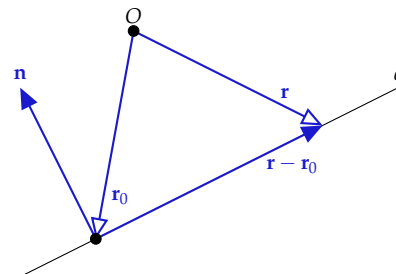
A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a  $t$  paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). A sík minden egyenesének van

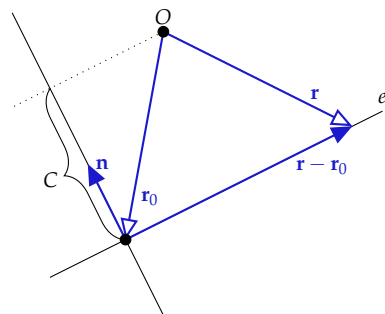
$$Ax + By = C \quad (2.5)$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol  $A$  és  $B$  közül nem mindkettő nulla, és  $(-B, A)$  az egyenes egy irányvektora.

► A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti imp-



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete:  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ .



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ . Ha  $\mathbf{n}$  egységvektor, akkor az  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$  geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az  $\mathbf{n}$  egyenesére eső merőleges vetülete  $C$ . Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.



licit egyenlete az egyenes  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$  alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen  $(A, B) = (b, -a)$ . Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az  $(a, b)$  irányvektorra. Továbbá  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$ , ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$  formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az  $(A, B)$  vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért a (2.5) egyenletről mondott állítás igaz. Erre olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

**BIZONYÍTÁS.** Ha  $a$  vagy  $b$  valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha  $a = 0$ , akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az  $x = x_0$  egyenlettel, hisz az  $y = y_0 + bt$  semmi mást nem mond, mint hogy  $y$  egy valós szám. Mivel  $(a, b) \neq (0, 0)$ , ezért csak az az eset marad, amikor  $a$  és  $b$  egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető  $t$ , és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban  $A = b$  és  $B = -a$ . Ekkor a fenti egyenlet  $Ax + By = Ax_0 + By_0$  lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst  $C$ -vel jelölve az egyenes egyenlete  $Ax + By = C$  alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az  $Ax + By = C$  egyenlet visszaírható  $Ax + By = Ax_0 + By_0$  alakba, hisz az  $Ax_0 + By_0 = C$  egyenletben  $A \neq 0$  esetén egy tetszőleges  $y_0$ -t választva, egyértelműen kifejezhető  $x_0$ . (A  $B \neq 0$  eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer.  $\square$

**2.9. PÉLDA (SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI).** Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a  $(2, 3)$  és az  $(1, 1)$  koordinátájú pontokon.

**MEGOLDÁS.** Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz  $\mathbf{v} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$ . Legyen  $\mathbf{r}_0 = (1, 1)$ , de az  $\mathbf{r}_0 = (2, 3)$  választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból  $(A, B) = (2, -1)$ , innen az egyenes egyenlete  $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$ , azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja.  $\square$

*Síkbeli pont egyenletei* Tekintsük a síkbeli  $(x_0, y_0)$  pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extrémális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai  $(1, 0)$  illetve  $(0, 1)$ , és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

*A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei* Tudjuk, hogy két lineárisan független  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató  $\mathbf{r}_0$  vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató  $\mathbf{r}$  vektor felírható  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{su} + \mathbf{tv}$  alakban.

2.10. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{su} + \mathbf{tv} \quad (2.6)$$

*alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  a sík két lineárisan független vektora és  $\mathbf{r}_0$  a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.30. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  merőleges  $\mathbf{u}$ -ra és  $\mathbf{v}$ -re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{su} + \mathbf{tv}$  vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.7)$$

*és a vele ekvivalens*

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (2.8)$$

*alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol  $\mathbf{n}$  a sík egy normálvektora,  $\mathbf{r}_0$  a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és  $C$  konstans.*

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal (ld. 2.2. feladat).

Az  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  és  $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$   $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$  jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). A háromdimenziós tér minden síkjának van

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_1s + a_2t \\y &= y_0 + b_1s + b_2t \\z &= z_0 + c_1s + c_2t\end{aligned}\tag{2.9}$$

alakú egyenletrendszerre, ahol  $(a_1, b_1, c_1)$  és  $(a_2, b_2, c_2)$  a sík két lineárisan független vektora, és  $(x_0, y_0, z_0)$  a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - z_0) = 0.$$

Az  $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$  jelöléssel a sík egyenlete  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens,  $Ax + By + Cz = D$  alakra.

2.13. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT EGYENLETE). A háromdimenziós térben minden síknak van

$$Ax + By + Cz = D\tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha  $A$ ,  $B$  és  $C$  legalább egyike nem nulla, és  $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ , ahol  $(x_0, y_0, z_0)$  a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$  alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak ortonormált koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1),\tag{2.11}$$

ami épp az  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  vektorral egyenlő, ezért  $(A, B, C)$  merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$  egyenletet koordináták alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. PÉLDA (SÍK EGYENLETEI). Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegegy  $(0, -1, 2)$ ,  $(-1, 0, 7)$  és  $(2, 1, 4)$  pontokon.

**MEGOLDÁS.** A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4) - (0, -1, 2) = (2, 2, 2), \text{ és}$$

$$\mathbf{v} = (-1, 0, 7) - (0, -1, 2) = (-1, 1, 5).$$

Ezek alapján például az  $\mathbf{r}_0 = (0, -1, 2)$  választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t. \end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint  $(A, B, C) = (8, -12, 4)$ , ezért a sík implicit egyenlete  $8(x - 0) - 12(y - (-1)) + 4(z - 2) = 0$ , azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2, -3, 1) \cdot (x, y, z) = 5, \text{ vagy } (2, -3, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlete. □

**Térbeli egyenes egyenletei** Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk az 55. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az  $e$  egyenest, melynek irányvektora  $\mathbf{v}$ , és amely átmegy azon a ponton, melybe az  $\mathbf{r}_0$  vektor mutat. Világos, hogy az  $e$  egyenes bármely pontjába mutató  $\mathbf{r}$  vektor előáll  $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  alakban, ahol  $t$  valós szám, és az  $e$ -re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

**2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE).** *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

*alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol  $\mathbf{v}$  az egyenes egy irányvektora, és  $\mathbf{r}_0$  egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felvesszünk egy koordinátarendszert, melyben  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  és  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ :

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}\tag{2.13}$$

*alakú egyenletrendszerre, ahol  $(a, b, c)$  az egyenes egy irányvektora, és  $(x_0, y_0, z_0)$  az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter ki-küszöbölhető. Ha az  $a$ ,  $b$  és  $c$  számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel  $t$ , akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel  $t$ , akkor mindegyikből kifejezve  $t$ -t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha  $a$ ,  $b$  és  $c$  egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A  $t$ -t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0), \quad c(x - x_0) = a(z - z_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. Kivétel az az eset, amikor az egyik egyenlet  $0 = 0$  alakú, ilyenkor a másik két egyenlet egy-egy sík egyenlete. Egy egyenes azonban megadható két sík metszésvonalaként, így adódik a következő tétel, melynek bizonyítását feladatként tűzzük ki (ld. 2.3. feladat):

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. Ha az egyenes egy irányvektora  $(a, b, c)$ , akkor a két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem  $0 = 0$  alakú:*

$$\begin{aligned}b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\c(y - y_0) &= b(z - z_0)\end{aligned}\tag{2.14}$$

► A (2.14) egyenletrendszer a következő alakba is átírható:

$$\begin{aligned} bx - ay &= bx_0 - ay_0 \\ cx - az &= cx_0 - az_0 \\ cy - bz &= cy_0 - bz_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Erről könnyen leolvasható, hogy ha pl.  $a \neq 0$ , akkor a második egyenlet  $b$ -szereséből kivonva az első egyenlet  $c$ -szeresét, a harmadik egyenlet  $a$ -szorosát kapjuk. Hamarosan látni fogjuk, hogy eszerint a harmadik egyenlet elhagyható, anélkül, hogy az egyenletrendszert kielégítő pontok halmaza megváltozna.

2.18. PÉLDA (TÉRBELI EGYENES EGYENLETRENDSZEREI). Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az  $A(1, 3, 4)$  és  $a) B(3, 3, 1)$ , illetve  $b) C(5, 5, -2)$  ponton.

**MEGOLDÁS.** *a)* Az  $A$  és  $B$  pontot összekötő vektor  $= (2, 0, -3)$ . Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t, \end{aligned}$$

melynek második egyenlete,  $y = 3$ , egy  $xz$ -síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenletből kiküszöbölve  $t$ -t, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből  $t = \frac{1}{2}(x - 1)$ , a harmadikból  $t = -\frac{1}{3}(z - 4)$  ezért  $3x + 2z = 11$ . Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 11 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

*b)* Az  $A$  és  $C$  pontot összekötő vektor itt  $= (4, 2, -6)$ . Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t. \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve  $t$ -t kapjuk, hogy

$$t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned}x - 2y &= -5 \\3x + 2z &= 11 \\3y + z &= 13.\end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere.  $\square$

*Térbeli pont egyenletei* Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli  $(x_0, y_0, z_0)$  pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\y &= y_0, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \\z &= z_0\end{aligned}$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned}x &= x_0 & x + 0y + 0z &= x_0 \\y &= y_0, \text{ vagy minden együtthatót kiírva} & 0x + y + 0z &= y_0. \\z &= z_0 & 0x + 0y + z &= z_0\end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned}A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\A_3x + B_3y + C_3z &= D_3.\end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

*Egyenletek  $\mathbb{R}^n$ -ben* Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete  $\mathbb{R}^n$ -ben is ugyanolyan alakú, mint  $\mathbb{R}^3$ -ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ , a síké  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$  alakú.



2.19. PÉLDA (EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). Írjuk fel az  $A(1,1,1,1)$ ,  $B(2,3,2,4)$  pontokon átmenő egyenes, valamint az  $A$ ,  $B$  és  $C(3,2,1,0)$  pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!

MEGOLDÁS. Az  $\vec{AB} = (1,2,1,3)$  és az  $\vec{AC} = (2,1,0,-1)$  vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$  alakú. E két esetben ez az egyenlet az  $n$ -dimenziós tér egy  $n - 1$ -dimenziós alakzatának egyenlete ( $n = 2, 3$ ). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az  $\mathbb{R}^n$  térben  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  esetén az  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$  egyenletet kielégítő  $\mathbf{r}$  vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

ahol  $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  a hipersík *normálvektora* (ld. 2.1. feladat),  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a hipersík egy tetszőleges pontjába mutató vektor.

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit.

	Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$
Térben	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$
	hipersík	???
$\mathbb{R}^n$ -ben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$

2.1. táblázat: Geometriai alakzatok egyenletei: az  $\mathbb{R}^n$ -beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, de arra biztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

*Feladatok*

2.1. Mutassuk meg, hogy  $\mathbb{R}^n$  egy tetszőleges  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$  egyenletű hipersíkjának bármely két pontját összekötő vektor merőleges  $\mathbf{n}$ -re.

2.2. Igazoljuk a sík implicit vektoregyenletére vonatkozó 2.11. állítást.

2.3. Igazoljuk a térbeli egyenes implicit egyenletrendszerére vonatkozó 2.17. állítást!

## A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítás. A számitások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

**Lineáris egyenlet és egyenletrendszer** Az előző rész végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja  $Ax + By = C$ , ahol  $A$ ,  $B$  és  $C$  konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.<sup>1</sup>

2.20. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLET). Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.16)$$

alakra hozható egyenletet az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ismeretlenekben lineáris egyenletnek nevezzük, ahol  $a_1, a_2, \dots$  és  $a_n$ , valamint  $b$  konstansok. Az  $a_1, a_2, \dots$  és  $a_n$  konstansokat az egyenlet együtthatóinak,  $b$ -t az egyenlet konstans tagjának nevezzük.

► Például az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5 - \pi)x_3 = 0, \quad a \cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

► A következő egyenletek nem lineárisak az  $x$ ,  $y$  és  $z$  ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x \sin z + y \cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az  $x$  és  $y$  ismeretlenekben, hisz ekkor  $z$  paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

► Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az  $x$ ,  $y$  és  $z$  ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

► Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

egyenlet nem lineáris, mert a  $z$ -vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris  $x + y + 2z = 0$  egyenlettel nem ekvivalens.

<sup>1</sup> *Lineáris*: a *vonalas* jelentésű latin *lineāris* szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászszinór*, átvitt értelemben *vonat*, *határvonal* jelentésű *linea* (*linea*) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú értelemben szokás* használni.

Lineáris egyenletek egy véges halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

► Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{array}{rclcl} 3x - y = 2 & x_1 & = & 3 & \\ -x + 2y = 6 & x_2 & = & 1 & 2x - 3y + z - w = 6. \\ x + y = 6 & x_3 & = & 4 & \end{array} \quad (2.17)$$

► Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer azonos átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely  $0 = b$  alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így a következő egyenletrendszerek is lineárisak az  $x$  és  $y$  ismeretlenekben:

$$\begin{array}{rclcl} ax + y = 2a & 3x - y = 0 & x + y = 1 & \\ x - \frac{1}{a}y = 0 & -x + 2y = 0 & 0 = 2. & \end{array} \quad (2.18)$$

$$\begin{array}{rclcl} & 0 = 0 & & \end{array}$$

Mindezek után fölírjuk az egyenletrendszer általános alakját:

**2.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER).** Lineáris egyenletrendszeren ugyanazokban a változóknak lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja  $m$  egyenlet és  $n$  ismeretlen esetén

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & & & & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, & & & & \end{array} \quad (2.19)$$

ahol  $x_1, x_2, \dots, x_n$  az ismeretlenek,  $a_{ij}$  az  $i$ -edik egyenletben az  $x_j$  ismeretlen együtthatóját jelöli, és  $b_i$  az  $i$ -edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, ha csak egy is különbözik 0-tól, inhomogén.

► A (2.17) egyenletrendszerei mind inhomogének, míg a (2.18) középső egyenletrendszere homogén.

A konzisztes szó jelentése: belső ellentmondástól mentes. Egyéb jelentései: szilárd, sűrű, tömött, tömör, tartalmas, egy séges, következetes. A latin consistens szóból ered, melynek jelentése helytálló.

**2.22. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA).** Azt mondjuk, hogy a rendezett  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  szám- $n$ -es megoldása a (2.19) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz ha minden egyenletet kielégít az  $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$  helyettesítéssel. Ha e szám- $n$ -est vektornak tekintjük, megoldásvektorról beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer megoldáshalmazának nevezzük. Egy egyenletrendszert konzisztensnek (vagy megoldhatónak) nevezünk, ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer inkonzisztens (nem megoldható).

► A (2.17) egyenletrendszerének egy-egy megoldása:  $(x, y) = (2, 4)$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$ ,  $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$ . A harmadik egyenletrendszernek több megoldása is van, például egy másik megoldás az  $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$ .

► A (2.18) első egyenletrendszerének megoldása  $(x, y) = (1, a)$ , a másodiké  $(x, y) = (0, 0)$ . A harmadik egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan  $x$  és  $y$  érték, melyre fennállna a  $0x + 0y = 2$  egyenlőség.

► Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám- $n$ -es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

**Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek** Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & x + y = 3 & x = 2 \\ x + 2y = 4 & y = 1 & y = 1 \end{array} \quad (2.20)$$

Mindháromnak  $(x, y) = (2, 1)$  az egyetlen megoldása.

**2.23. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK).** Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

**2.24. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK).** Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

Ezen kívül

4. egy  $0 = 0$  alakú egyenlet elhagyása is ekvivalens átalakítás, de ez egyet csökkenti az egyenletek számát.

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatalozottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatalozottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatalozottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan” vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám- $n$ -es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok” egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatalozottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatalozott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatalozott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

**BIZONYÍTÁS.** Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.11. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást. Tekintsük az *eredeti* egyenletrendszer egy megoldását, és azt az *új* egyenletrendszert, melyet az  $i$ -edik egyenlet  $c$ -szeresének a  $j$ -edikhez adásával kapunk. Világos, az átalakítás előtt is elvégezhetjük a behelyettesítést, akkor viszont egy kielégített egyenlőség konstansszorosát adjuk egy másikhoz, ami így ugyancsak ki lesz elégítve. Tehát az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Másrészt viszont az új egyenletrendszer minden megoldása az eredetinek is megoldása, hisz az visszakapható az újból az  $i$ -edik egyenlet  $-c$ -szeresének a  $j$ -edikhez adásával. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens.  $\square$

**Mátrixok** Az egyenletrendszer megoldásában az ekvivalens átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, ezért az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit elég csak egy olyan táblázaton elvégezni, mely az együtthatókat és a konstansokat tartalmazza. Az ilyen számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy  $m \times n$ -es mátrixnak  $m$  sora és  $n$  oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrixokat<sup>2</sup> általában nagy betűvel jelöljük, e könyvben – követve a műszaki nyelv szokásait – félkövér nagy betűvel. A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát  $\mathbf{A}$  elemei  $a_{11}, a_{12}, \dots$ . A fenti mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ vagy egyszerűen az } \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni. Sokan használnak szögletes helyett kerek zárójelet a mátrixok jelölésére.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát  $a_{23}$  a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére  $a_{ij}$  helyett  $a_{i,j}$ -t írunk (pl.  $a_{n,n-1}$ ).

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyi-adik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei  $a_{11}, a_{22}, \dots$

*Mátrix:* a latin mater (mäter) (*anya, szülőanya, forrás*) szó származéka a matrix (mātrix), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat, vemhes állat, anyaméh, bezárt hely, ahonnan valami kifejlődik, bezárt, körülzárt dolgok sokasága, tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

<sup>2</sup> A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az  $\mathbf{A}$ -val jelölt mátrix (informatikai szóhasználatnál *tömb*)  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét  $\mathbf{A}[i, j]$  vagy  $\mathbf{A}(i, j)$  jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így  $\mathbf{A}[i]$  az  $i$ -edik sort,  $\mathbf{A}[i][j]$  az  $i$ -edik sor  $j$ -edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektorra vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az  $\mathbf{A}$  mátrix 2. sorát az  $\mathbf{A}(2, :)$ , 3. oszlopát a  $\mathbf{A}(:, 3)$  kóddal érhetjük el. Sok programnyelvben a tömbök elemeit nem 1-től, hanem 0-tól indexelik, ilyen például a C és a Python is.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel, mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az  $n \times 1$ -es mátrixot *oszlopvektornak* vagy *oszlopmátrixnak*, az  $1 \times n$ -es mátrixot *sorvektornak* vagy *sormátrixnak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy  $n$ -dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Manapság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni, de egyes témáknál a másik használatát is bemutatjuk. Így tehát az  $(1, 2)$  vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

Általában  $\mathbf{a}_j$  jelöli az  $\mathbf{A}$  mátrixból kiválasztható  $j$ -edik oszlopvektort, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az  $i$ -edik sorvektort  $\mathbf{a}_{i*}$ , a  $j$ -edik oszlopvektort  $\mathbf{a}_{*j}$  jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sorára az  $(\mathbf{A})_{i*}$ ,  $j$ -edik oszlopára az  $(\mathbf{A})_{*j}$ , elemére az  $(\mathbf{A})_{ij}$  jelölés is használatos.

2.25. PÉLDA (MÁTRIXOK ÉS ELEMEIK). Ha

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ akkor } c_{23} = 7, \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa** Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített mátrixa*, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól.

A 2.21. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

A gyakorlatban nagy méretű egyenletrendszereket, s így nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ha elemeik nagy része 0, *ritka mátrixoknak* nevezzük. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük. Előbb a kis méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

VEKTOROK MAGYAR IRODAI és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a vektor koordinátái közé *elválasztó-jelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

2.26. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$2x + 3y + 2z = 7$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

**MEGOLDÁS.** Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.20) egyenletrendszerénél látott utolsó két egyszerűbb alak elérése a cél. Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 6 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Kicseréljük az első két egyenletet:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 7$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

Kicseréljük az első két sort:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből (azaz  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez).

$$x + y + z = 3$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból (azaz az első sor  $-2$ -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Az egyenletrendszerről azonnal leolvasható  $y$  és  $z$  értéke. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk  $x$  értékét is, nevezetesen  $x + y + z = 3$ , azaz  $y = 1$  és  $z = 0$  behelyettesítése után:  $x + 1 + 0 = 3$ , vagyis  $x = 2$ . Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás:  $(x, y, z) = (2, 1, 0)$ .  $\square$



**Sormodell: hipersíkok metszete** A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

Tudjuk, hogy a kétváltozós lineáris  $ax + by = c$  egyenletet kielégítő pontok halmaza egyenest alkot, ha  $a$  és  $b$  legalább egyike nem 0. (Ha  $a = b = c = 0$ , akkor az egyenlet alakja  $0x + 0y = 0$ , azaz  $0 = 0$ , ami minden  $(x, y)$  számpárra fennáll, tehát a megoldások halmaza a sík összes pontjának halmazával azonos. Ha  $a = b = 0$ , de  $c \neq 0$ , akkor az egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz üres.)

2.27. PÉLDA (SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL). *Ábrázoljuk az alábbi egyenletrendszereket és megoldásukat a sormodellben!*

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \quad \text{az} \quad \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{array} \quad \text{és az} \quad \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}$$

**MEGOLDÁS.** Az első egyenletrendszer szerinti ábra egy metsző egyenespárt tartalmaz. Metszéspontjuk a megoldás. Ezt a 2.6 ábra felső rajza mutatja. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A megoldás közben két újabb egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

A 2.6 ábrán az így kapott egyenletrendszerek sormodell szerinti ábráit is megrajzoltuk.

A második egyenletrendszerben két párhuzamos egyenes egyenlete szerepel. Ezeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, az ellentmondó  $0 = 1$  egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Valóban, a  $0x + 0y = 1$  egyenletet kielégítő pontok üres halmazt adnak.

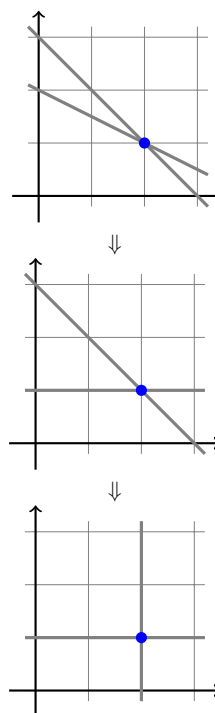
A harmadik egyenletrendszer egyenleteihez két egybeeső egyenes tartozik. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát ennek az egyenesnek a pontjaiból áll.

Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, itt egy  $0 = 0$  egyenletet kapjuk, amely így elhagyható. A megmaradó  $x + 2y = 3$  egyenlet összes megoldása paraméteres alakba írva például  $(x, y) = (3 - 2t, t)$ . □

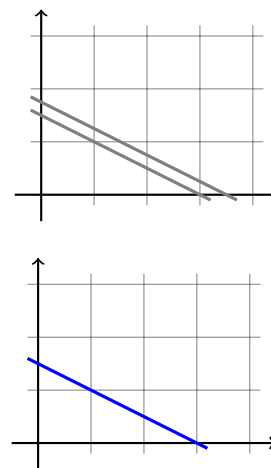
► Hasonlóan szemléltethető a 3-dimenziós térben a háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Fölsoroljuk a három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszerre vonatkozó lehetőségeket:

- Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8.

Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése a sormodellben jól nyomon követhető a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.



2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése



2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

(a) ábra). Például a 2.26. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van:  $(x, y, z) = (2, 1, 0)$ .

- Lehet, hogy a három sík metszete egy egyenes. Ilyen például a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2.21)$$

egyenletrendszer. Ekkor a három normálvektor egy síkba (de nem egy egyenesbe) esik. Itt például a normálvektorok közt fennáll a

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) - (3, 2, 3) = \mathbf{0}$$

összefüggés. Ugyanez a lineáris kapcsolat áll fenn az egyenletek közt is, vagyis a harmadik egyenlet az első kettő összege, ami azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet el is hagyható.

- Változtassuk meg a fenti egyenletrendszer harmadik egyenletének konstans tagját:

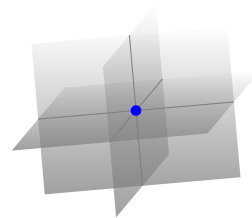
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ennek sormodell szerinti ábrája három olyan síkot tartalmaz, melyek párhuzamosak egy egyenessel, de nincs közös pontjuk, mint az a 2.9. (b) ábrán látható. Ha kivonjuk az első és második egyenletet a harmadikból, akkor az ellentmondó  $0 = 1$  egyenletre jutunk, míg az imént a 2.21 egyenletrendszer esetén az elhagyható  $0 = 0$  egyenletet kaptuk. Ennek oka, hogy bár a normálvektorok közt ugyanaz a lineáris kapcsolat van mint az imént (egy síkba esnek), az egyenletek lineárisan függetlenek! Általában is igaz, nincs megoldása az olyan egyenletrendszereknek, ahol bizonyos normálvektorok lineárisan összefüggők, de a hozzájuk tartozó egyenletek már nem. Gondoljuk meg, ilyen eseteket mutat a 2.9. (a) ábra is.

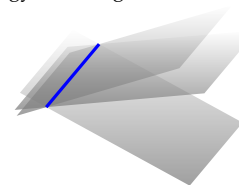
- Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \quad (2.23)$$

egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorososa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen  $x + y + z = 3$  egyenletből álló egyenletrendszerrel. Az  $y$ -nak és  $z$ -nek tetszőleges értéket választunk, például legyen  $y = s$ ,  $z = t$ , akkor  $x = 3 - y - z$ , azaz  $x = 3 - s - t$ . Így az összes megoldás:  $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$ . Ezt



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

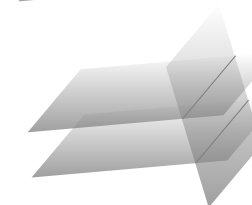


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak

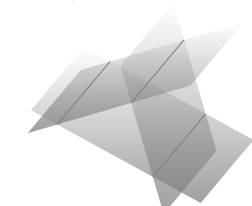


(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Konzisztens (megoldható) egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos.



(b) Egy egyenessel párhuzamos, de egymással nem párhuzamos és közös egyenest sem tartalmazó három sík.

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek szemléltetése

oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.8. (c) ábra szerint eset.

► A 2- és 3-dimenziós esetek analógiájára kialakíthatunk egy elképzelést az  $n$ -dimenziós esetre is. Itt minden egyenlet megoldáshalmaza a tér egy hipersíkja, kivéve a  $0 = 0$  egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az egész tér, és a  $0 = 1$  egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az üreshalmaz.

**2.28. ÁLLÍTÁS (SORMODELL).** *Ha egy  $n$ -ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak  $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha egy  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer  $m$  ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő  $m$  hipersík közös része  $\mathbb{R}^n$ -ben.*

Az  $m$  egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az  $m \times n$ -es  $\mathbf{A}$  együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer  $i$ -edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Ha  $\mathbf{a}_{i*}$  jelöli az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sorvektorát, és  $\mathbf{x}$  az ismeretlenek vektorát, akkor az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \quad (2.24)$$

Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet  $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$  alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan  $\mathbf{x}$  vektort keresünk, mely merőleges az  $\mathbf{a}_{i*}$  vektorok mindegyikére.

**Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként** E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.27. példabeli

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követhetők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az  $(1, 1)$  és  $(1, 2)$  vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a  $(3, 4)$  vektorral.

2.29. PÉLDA (OSZLOPMODELL). *Ábrázoljuk a 2.27. példában megadott*

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & x + 2y = 3 & x + 2y = 3 \\ x + 2y = 4 & 2x + 4y = 7 & \text{és} & 2x + 4y = 6 \end{array}$$

*egyenletrendszereket az oszlopmodellben!*

**MEGOLDÁS.** Az első egyenletrendszer esetén két lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként kell előállítani egy harmadik vektort. Ezt szemlélteti a 2.10 ábra. Érdekességként itt is megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásának lépései hogy mutatnak e modellben. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & \Rightarrow & x + y = 3 & \Rightarrow & x & = & 2 \\ x + 2y = 4 & \Rightarrow & & y = 1 & \Rightarrow & & y = 1 \end{array}$$

Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A második és harmadik egyenletrendszer vektoros alakja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A 2.11 ábráról szemléletesen is látható, hogy az egyik vektoregyenletnek nincs megoldása, míg a másoknak végtelen sok is van.  $\square$

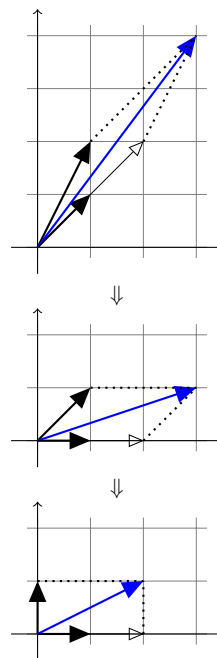
Általánosan kimondható a következő:

2.30. ÁLLÍTÁS (OSZLOPMODELL). *A 2.21. definícióban megadott (2.19) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:*

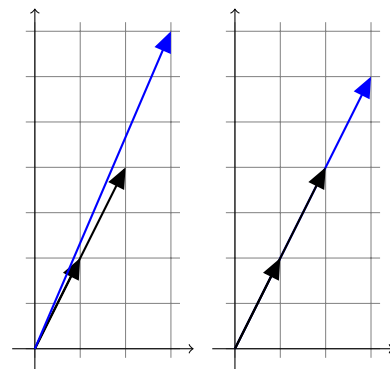
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

*Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.*

E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.13. feladat).



2.10. ábra: A megoldás lépései a oszlopmodellben.



2.11. ábra: Oszlopmodell lineárisan összefüggő vektorok esetén.

**Feladatok**

**2.4\*** Melyek lineáris egyenletek az  $x, y$  és  $z$  változóban az alábbiak közül?

- a)  $3x - (\ln 2)y + e^3z = 0.4$     b)  $a^2x - b^2y = 0$   
 c)  $xy - yz - zx = 0$     d)  $(\sin 1)x + y - \pi z = 0$   
 e)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$     f)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

2.5. 
$$\left. \begin{matrix} x + 3y = 5 \\ y = 1 \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} x + y = 3 \\ x = 2 \end{matrix} \right\}$$

2.6. 
$$\left. \begin{matrix} 2x + 3y = 2 \\ 0x + 0y = 3 \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} x + y = 2 \\ x + y = 7 \end{matrix} \right\}$$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az  $a = 1, b = 2, c = 3$  paraméteroállítás esetén!

2.7. 
$$\left. \begin{matrix} (2a - b)x + (3a - c)y = 0 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{matrix} \right\}$$

2.8. 
$$\left. \begin{matrix} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{matrix} \right\}$$

2.9. 
$$\left. \begin{matrix} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 1 \end{matrix} \right\}$$

2.10. 
$$\left. \begin{matrix} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (c - b)y = 2 \end{matrix} \right\}$$

**2.11. EGYENLETRENDSZEREK KÖZÖS MEGOLDÁSA** Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó  $\mathcal{E}_1$  és  $\mathcal{E}_2$  egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza  $\mathcal{M}_1$ , illetve  $\mathcal{M}_2$ . Mutassuk meg, hogy ha  $\mathcal{E}$  az  $\mathcal{E}_1$  és  $\mathcal{E}_2$  egyenletrendszerek egyesítése, azaz  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ , és  $\mathcal{M}$  az  $\mathcal{E}$  megoldáshalmaza, akkor  $\mathcal{M}$  az  $\mathcal{M}_1$  és  $\mathcal{M}_2$  közös része, azaz  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ .

Vizsgáljuk meg ezt az állítást az alábbi esetekben:

- a)  $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2\}, \mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\};$   
 b)  $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}, \mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\};$   
 c)  $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}, \mathcal{E}_2 = \{x - y = 1\};$   
 d)  $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}, \mathcal{E}_2 = \{0x + 0y = 0\};$   
 e)  $\mathcal{E}_1$  tetszőleges egyenletrendszer,  $\mathcal{E}_2 = \{0 = 0\}.$

**2.12\* SOR ÉS OSZLOPMODELL** Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) 
$$\begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{matrix}$$
    b) 
$$\begin{matrix} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 4 \end{matrix}$$

**2.13. SOR- ÉS AZ OSZLOPMODELL 3D-BEN** Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer

megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{matrix} x + y + 2z = 3 & x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 3 & x + 2y + 4z = 3 \\ 3x + 4y + 8z = 9 & 3x + 4y + 8z = 1 \end{matrix}$$

**2.14. SOR ÉS OSZLOPMODELL  $m \neq n$  ESETÉN** Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

a) 
$$\begin{matrix} x + y = 3 \\ x + y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{matrix}$$
    b) 
$$\begin{matrix} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{matrix}$$
    c) 
$$\begin{matrix} x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{matrix}$$

**2.15\* IGAZ – HAMIS** Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

- a) Ha egy  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.  
 b) Ha egy  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.  
 c) Ha egy  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektor-egyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

**2.16\*** Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

- a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra  $a(z)$   $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ ból/ből áll, melyek ha  $\dots$ , akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma  $\dots$ . Oszlopmodellje  $a(z)$   $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ ból/ből áll.  
 b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra  $a(z)$   $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a  $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ ból/ből.  
 c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra  $a(z)$   $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ ból/ből áll. Oszlopmodellje  $a(z)$   $\dots$ -dimenziós térben  $\dots$  darab  $\dots$ -ból/ből áll.

## Megoldás kiküszöböléssel

**Elemi sorműveletek** A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.24. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.<sup>3</sup>

2.31. DEFINÍCIÓ (ELEMI SORMŰVELETEK). *Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:*

1. Sorcsere: két sor cseréje.
2. Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.
3. Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla  $c$  számmal, hisz az az  $1/c$ -vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor  $c$ -szeresét, hisz az a  $-c$ -szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1.  $S_i \leftrightarrow S_j$ : az  $i$ -edik és a  $j$ -edik sorok cseréje.
2.  $cS_i$ : az  $i$ -edik sor beszorzása  $c$ -vel.
3.  $S_i + cS_j$ : a  $j$ -edik sor  $c$ -szeresének az  $i$ -edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az  $O_i \leftrightarrow O_j$ ,  $cO_i$ ,  $O_i + cO_j$  formulákat használjuk.

**Lépcsős alak** Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.26. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha megtartani kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.32. DEFINÍCIÓ (LÉPCSŐS ALAK). *Egy mátrix lépcsős, vagy sorlépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább egyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

<sup>3</sup> Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már időszámításunk előtt 300 körül babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kínai Jiùzhāng Suànshù (tradicionális jelekkel: 九章算術, egyszerűsített jelekkel: 九章算术) című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűlt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete” vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokról” lehet). E műben már a kiküszöbölés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplő egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a [The MacTutor History of Mathematics archive](#) című weboldalon.

2.33. PÉLDA (LÉPCSŐS ALAK). A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Gauss-módszer** A Gauss-módszer, más néven Gauss-kiküszöbölés vagy Gauss-elimináció a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.26. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.34. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 - \frac{3}{2}S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből  $z = -2$ , ezt a másodikba helyettesítve  $y = 3$ , ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy  $x = 1$ , azaz az egyetlen megoldás  $(x, y, z) = (1, 3, -2)$ .  $\square$

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változó-

it, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változóknak* nevezzük.

2.35. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{aligned}\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-3S_1}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3-2S_2} \\ \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz  $x_1$  és  $x_3$ . A szabad változók:  $x_2, x_4, x_5$ . A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke  $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$ . Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük  $x_3$ -at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az  $x_1$ -et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\end{aligned}$$

Innen az egyenletrendszer megoldása:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left( \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen ez az utóbbi felírásmód lesz hasznos, melyben vektorok lineáris kombinációja szerepel.  $\square$



Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásoknak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az  $s = 0$ ,  $t = 1$ ,  $u = 2$  értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Vajon ez mindig sikerül?

**2.36. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS).** *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.*

**BIZONYÍTÁS.** Tekintsünk egy tetszőleges  $m \times n$ -es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét  $m$  és  $n$  fogja jelölni,  $a_{ij}$  pedig a letakarások után maradt mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyanal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben  $a_{11} \neq 0$ .
3. Tekintsük az  $i$ -edik sort  $i = 2$ -től  $i = m$ -ig. Ha az  $i$ -edik sor első eleme  $a_{i1} \neq 0$ , akkor az első sor  $-a_{i1}/a_{11}$ -szeresét adjuk hozzá, azaz hajtsuk végre az  $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$  elemi átalakítást. Mivel  $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$ , ezért e lépés után az  $a_{11}$  alatti elemek mind 0-k lesznek.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást. Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához.  $\square$

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénból a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.37. PÉLDA (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA).  
Oldjuk meg a 2.35. példabeli egyenletrendszerhez tartozó

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert.

**MEGOLDÁS.** Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek közben nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.35. példa megoldásában, azaz

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\2x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne a konstans tagok nélkül:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u\right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejtethő kapcsolatára még visszatérünk a ?? tételben.  $\square$

Végül egy alkalmazás:

2.38. PÉLDA (SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!*

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\3x + 4y &= 2\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két

egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y - 3z = -1 \end{array}$$

Ebből  $z = t$  paraméterválasztással  $y = -1 + 3t$  és  $x = 2 - 4t$ , azaz

$$(x, y, z) = (-4t + 2, 3t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-4, 3, 1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

**Redukált lépcsős alak** A 2.26. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk (elimináltunk) minden elemet.

2.39. DEFINÍCIÓ (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). Egy mátrix redukált lépcsős, vagy redukált sorlépcsős alakú, ha kielégíti a következő feltételeket:

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

A főelemet itt vezéregyesnek vagy vezető egyesnek is szokás nevezni.

2.40. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészekben akarunk maradni. Azonban az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében. A kiküszöbölés lépéseinek követésére használható a SagePlayer redukált lépcsős alak című szemléltető munkalapja.

2.41. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). Hozzuk redukált lépcsős alakra az

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

**MEGOLDÁS.** Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Egy másik lehetséges megoldás:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bár különböző úton, de mindkétszer azonos eredményre jutottunk. Valóban, hamarosan be fogjuk látni, hogy a redukált lépcsős alak egyértelmű, míg e példából is látjuk, hogy a lépcsős alak nem: a megadott mátrixnak a megoldás során négy különböző lépcsős alakját is előállítottuk (az első megoldás utolsó két mátrixa és a második megoldás utolsó három mátrixa lépcsős alakú).  $\square$

**Gauss–Jordan-módszer** A Gauss–Jordan-módszer (Gauss–Jordan-kiküszöbölés, Gauss–Jordan-elimináció) a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.42. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). Oldjuk meg a 2.34. példában felírt egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

**MEGOLDÁS.** Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.34. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk, először besorozzuk a sorokat a főátlóbeli elem reciprokával, majd a har-

madik oszlopot, végül a másodikat kinullázzuk:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{\dots} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} 1/2S_2 \\ -S_3 \end{array}]{\dots} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ S_1 - 2S_3 \end{array}]{\dots} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - S_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array} \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása  $(x, y, z) = (1, 3, -2)$ .  $\square$

**2.43. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS).**  
Oldjuk meg a 2.35. példabeli

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

**MEGOLDÁS.** A 2.35. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\dots} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} 1/2S_2 \\ S_1 - S_2 \end{array}]{\dots} \\ \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

Végezzük el az  $x_2 = s$ ,  $x_4 = t$ ,  $x_5 = u$  helyettesítést, az  $x_1$  és  $x_3$  változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left( \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.35. példában.  $\square$

*A redukált lépcsős alak egyértelműsége* Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.44. TÉTEL (A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ). Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.

**BIZONYÍTÁS.** A redukált lépcsős alak létezését már beláttuk, az egyértelműsége indirekt bizonyítást adunk. Tegyük fel, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{S}$ . Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatók, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje  $\hat{\mathbf{R}}$  és  $\hat{\mathbf{S}}$ . Tehát  $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$ , mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorkvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott  $\hat{\mathbf{R}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

és

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorkvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az  $\hat{\mathbf{R}}$  és  $\hat{\mathbf{S}}$  mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden  $i = 1, \dots, k$  indexre  $r_i = s_i$ , vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$ , ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló  $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$  feltevés helytelen volt, tehát  $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ . (E bizonyítás Holzmann<sup>4</sup> interneten publikált cikkén alapul).  $\square$

<sup>4</sup>Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. <http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf>, 2002

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az  $\text{rref}(\mathbf{A})$  jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy  $m \times n$ -es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli. Például

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Szimultán egyenletrendszerek** Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

**2.45. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK).** *Több egyenletrendszer halmazát szimultán egyenletrendszernek nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.*

2.46. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 3 & u + v + w = 3 & r + s + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 7 & 2u + 3v + 2w = 7 & 2r + 3s + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 6 & 2u + 2v + 3w = 7 & 2r + 2s + 3t = 1 \end{array}$$

**MEGOLDÁS.** Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-2S_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_1-S_2 \\ S_1-S_3}} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$

Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.47. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER BŐVÍTETT MÁTRIXA). Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



**MEGOLDÁS.** A Gauss–Jordan-módszer lépései:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{s_2 - \frac{5}{2}s_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2s_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 - s_2} \\ &\left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}s_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

**Kiküszöbölés  $\mathbb{Z}_p$ -ben\*** Ha  $p$  prím, akkor a modulo  $p$  maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss–Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók  $\mathbb{Z}_p$  fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a ?? oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.48. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER  $\mathbb{Z}_2$  FÖLÖTT). *4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje  $a, b, c$  és  $d$ . Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen  $a + b + c + d$ ,  $a + c + d$  és  $a + b + d$  bitet. Az összeadás itt természetesen  $\mathbb{Z}_2$  fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az  $(?, ?, ?, ?, 1, 0, 1)$  kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?*

**MEGOLDÁS.** Az  $a, b, c$  és  $d$  bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b + c + d &= 1 \\ a + \quad c + d &= 0 \\ a + b + \quad d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss–Jordan kiküszöböléssel  $\mathbb{Z}_2$  fölött. Ne felejtsük, hogy  $\mathbb{Z}_2$ -ben  $1 + 1 = 0$ , így  $1 = -1$ , azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 + s_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 + s_2} \\ \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{s_2 + s_3 \\ s_1 + s_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből  $d = 0$ . A szabad változó  $c$ , legyen  $c = s$ . Így a második egyenletből  $b = 1 + c$ , azaz  $b = 1 + s$  és az elsőből  $a = c$ , azaz  $a = s$ . A megoldás általános alakban  $(a, b, c, d) = (s, 1 + s, s, 0)$ , azaz

$(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$ . Az  $s = 0$  és az  $s = 1$  értékekhez tartozó megoldások tehát:  $(0, 1, 0, 0)$  és  $(1, 0, 1, 0)$ .

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet  $[7, 4, 3]_2$  bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bite egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható.  $\square$

2.49. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER  $\mathbb{Z}_5$  FÖLÖTT). Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert  $\mathbb{Z}_5$  fölött.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 1 & 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 & 3x + 4y = 3 \end{array}$$

**MEGOLDÁS.** A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a ?? oldalon található ?? ábra szorzástábláját.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{3s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut  $\mathbb{Z}_5$  összes elemén. Szabad változó az  $y$ , legyen  $y = s$ , így  $x = 3 - 4s = 3 + s$ , tehát  $(x, y) = (3 + s, s)$ , azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel  $\mathbb{Z}_5$ -nek öt eleme van, ezért  $s$ -nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása  $(3, 0)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 4)$ . A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{3s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{3s_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Így a megoldás  $(x, y) = (0, 2)$ .  $\square$

## Feladatok

**2.17.\* LÉPCSŐS ALAK: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- a) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nem-zérus sor van.
- b) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi fő-oszlop (bázisoszlop) van.
- c) Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.
- d) Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.
- e) Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

**2.18.\* EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- a) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.
- b) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletről áll, mint ahány ismeretlenes.
- c) Ha egy valósegűtthetős lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.
- d) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

2.19. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.20. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

2.21. 
$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = -1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

2.22. 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 5x - 4z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 5x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

2.23. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

a) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.24.\* A három elemi sorművelet egyike elvégezhető a másik kettő segítségével is. Melyik és hogyan?

## Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

**A kiküszöbölés műveletigénye** Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszer különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk a ?? oldalán.

2.50. TÉTEL (A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE). A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy  $n$ -ismeretlenes,  $n$  egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ összeadás/kivonás, } \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \text{ szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \text{ flop,}$$

azaz jó közelítéssel  $2n^3/3$  flop.

**BIZONYÍTÁS.** Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához  $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$  összeadás és  $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$  szorzás szükséges. A visszahelyettesítés  $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$  összeadásból és  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$  szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az  $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$  összeadás mellett  $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$  szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához  $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$  összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra hagyjuk.  $\square$

**Numerikusan instabil egyenletrendszerek** A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.51. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$6.73x - 8.97y = 5.61$$

$$4.79x - 6.39y = 3.99$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!

**MEGOLDÁS.** Az egyenletrendszer megoldása:  $x = 1.5$ ,  $y = 0.5$ . Az első egyenletben az  $x$  együtthatóját újra mérjük, és másodszerre egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől:  $x \approx -2.26$ ,  $y \approx -2.32$ . Újabb mérés az  $y$  együtthatóját  $-8.96$ -nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől:  $x \approx 4.35$ ,  $y \approx 2.64$ . Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor  $x \approx 7.21$ ,  $y \approx 4.78$  lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek  $x = 1.5$ ,  $y = 0.5$  értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$6.72x - 8.96y = 5.60$$

$$4.80x - 6.40y = 4.00$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorososa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk.  $\square$

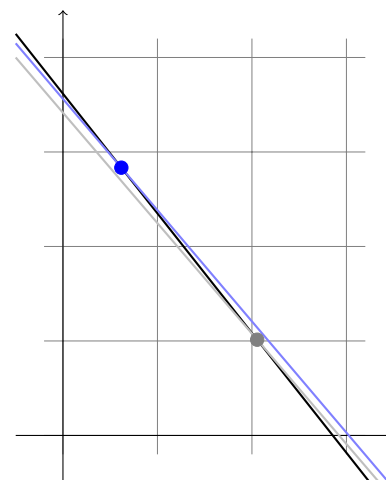
Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabillnak* vagy *rosszul kondicionálnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétféle változós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel” van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem” lineá-



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

ris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

**Részleges főelemkiválasztás** A következő példákban lebegőpontos aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt  $p$  értékes jegyre kerékítünk.

2.52. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). *Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.*

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** Pontosan számolva

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^4 s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right]$$

amiből az eredmény  $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1 + 10^4}$ . Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például  $10^{-4}$  helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől:  $x = y = 2$ . Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^4 s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

ahol a közelítésnél a  $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$  összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont  $x = 0, y = 2$  a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^{-4} s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 + 10^{-4} & 2 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

amelynek megoldása  $x = y = 2$ , ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz!  $\square$

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis reciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A  $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$  kerekítés hatása, vagyis a  $-1$  „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

És ennek valóban  $x = 0$ ,  $y = 2$  a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajóhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelemkiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezik.

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.53. PÉLDA (RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS). *Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

**MEGOLDÁS.** Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van,

így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} s_2 - s_1/2 \\ s_3 - s_1/4 \\ s_4 - s_1/3 \end{array}} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix} \\
 \\
 \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_4} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} s_3 - s_2/2 \\ s_4 - s_2/3 \end{array}} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \end{bmatrix} \\
 \\
 \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_4 - s_3/2} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad \square
 \end{array}$$

**Skálázás** A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen besorozzuk?

2.54. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). A 2.52. példában szorozzuk meg az első egyenletet  $10^5$ -nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.

$$\begin{array}{r}
 10x + 10^5y = 2 \cdot 10^5 \\
 x - y = 0
 \end{array}$$

**MEGOLDÁS.** Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is  $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1+10^4}$  a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - \frac{1}{10}s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

amiből  $x = 0$  és  $y = 2$ . □

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben  $10^6$ -nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenletlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a



következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együttthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer  $[A|b]$  bővített mátrixának minden sorát osszuk el az  $A$  együttthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így  $A$  minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekre a következőkben ismertetendő iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

*Iteratív módszerek* A továbbiakban is csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek  $n$ -ismeretlenesek és  $n$  egyenletből állnak, tehát melyek együttthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen  $f$  egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két  $a$  és  $b$  pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága  $a$  és  $b$  távolságának legfeljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $f$  összes különbségi hányadosa legfeljebb  $1/2$ . A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan  $\bar{x}$  pont létezik, hogy  $\bar{x} = f(\bar{x})$ , és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges  $x_0$  pontból kiindulva képezzük az

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az 1/2-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A **Banach fixponttétel** könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges  $P_0$  pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódnáskor hová ugrik, legyen ez a  $P_1$  pont az asztalon. A kinyújtott gumilap  $P_1$  fölötti pontja összehúzódnáskor az  $P_2$  pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.

**Jacobi-iteráció** Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az  $x = f(x)$  alakú legyen, ahol  $x$  jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.55. PÉLDA (JACOBI-ITERÁCIÓ). Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk  $x = f(x)$  alakra, és egy tetszőleges  $x_0$  vektorból indulva végezzünk az  $x_{k+1} = f(x_k)$  formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

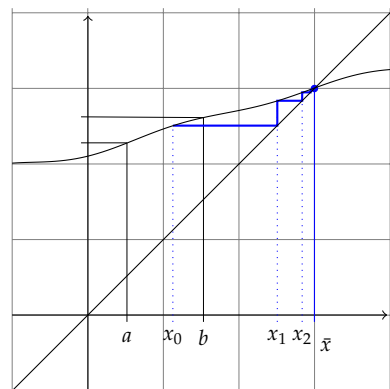
**MEGOLDÁS.** Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy  $x = (1, 2)$  az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert  $x = f(x)$ , azaz  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$  alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az  $x$ -et, a másodikból  $y$ -t kifejezzük:

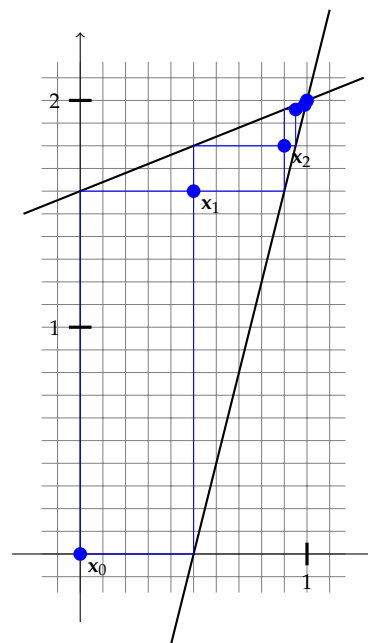
$$\begin{aligned} x &= \frac{y + 2}{4} \\ y &= \frac{2x + 8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy  $x_0$  vektort tetszőlegesen, legyen pl.  $x_0 = (0, 0)$ , azaz  $x = y = 0$ . A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy  $x_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$ . A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x$	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
$y$	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000



2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely  $a$  és  $b$  pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága  $a$  és  $b$  távolságának legfölbjebb a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legfölbjebb 1/2. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges  $x_0$  pontból induló  $x_k = f(x_{k-1})$  sorozat határértékeként.



2.14. ábra: A Jacobi-iteráció szemléltetése

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensenek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot.  $\square$

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A  $k$ -adik egyenletből fejezzük ki az  $x_k$  változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Válasszunk az ismeretlenek  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektorának egy  $\mathbf{x}_0$  kezdőértéket, pl. legyen  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)$ . A (2.25) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be  $\mathbf{x}_0$  koordinátáinak értékét, a bal oldal adja  $x_1$  koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az  $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$  vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

**Gauss–Seidel-iteráció** A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.25) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss–Seidel-iterációnak*.

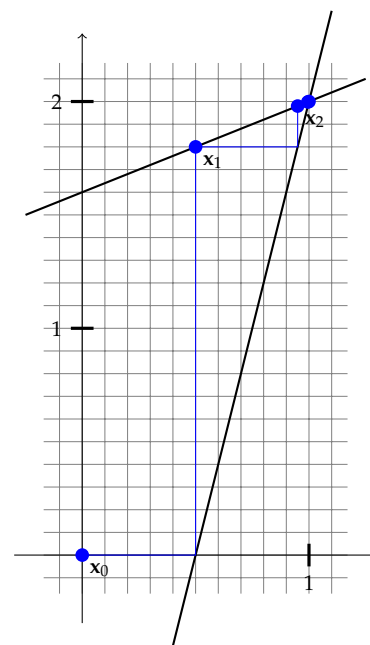
2.56. PÉLDA (GAUSS–SEIDEL-ITERÁCIÓ). Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Seidel-iterációval.

**MEGOLDÁS.** Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$



2.15. ábra: A Gauss–Seidel-iteráció szemléltetése

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál  $\mathbf{x}_0 = (0,0)$  kezdőérték után az  $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$  értékek következtek, a Gauss–Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt  $x = \frac{1}{2}$  értéket helyettesítjük, azaz  $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$ . A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
$x$	0	0.5	0.95	0.995	1.000
$y$	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. □

Mindkét iteráció jól szemléltethető a 2-ismeretlenes esetben. A 2.14. és a 2.15. ábrák ezt mutatják. Ha pontosan számolunk, végtelen sok pontot kapunk, az ábrák csak néhány pontot mutatnak.

*Az iterációk konvergenciája* A fenti példából nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.57. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg Jacobi- és Gauss–Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5\end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
$x$	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
$y$	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss–Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
$x$	0	2	1	-1	-5
$y$	0	-1	-3	-7	-15

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.58. DEFINÍCIÓ (SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX). Azt mondjuk, hogy az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, vagy soronként (szigorúan) domináns főátlójú, ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben

$$\begin{array}{rcl} |a_{11}| > & |a_{12}| + \dots + |a_{1,n-1}| + & |a_{1n}| \\ |a_{22}| > & |a_{21}| & + \dots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ |a_{n-1,n-1}| > & |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \dots & + |a_{n-1,n}| \\ |a_{nn}| > & |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}| & \end{array}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{array}{r} 4x - y = 11 \\ 2x - 5y = -17 \end{array}$$

2.59. TÉTEL (ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA). Ha az  $n$  egyenletből álló  $n$ -ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iteráció is konvergens.

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss – Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az

viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.26. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek” témában írt könyveket, web-oldalakat.

## Feladatok

### Jacobi-iteráció

2.25. Oldjuk meg a

$$4x - y = 8$$

$$2x - 5y = -5$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

### Vegyes feladatok

2.26. **JACOBI-ITERÁCIÓ KONVERGÁL, GAUSS-SEIDEL-ITERÁCIÓ NEM** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$x + z = 0$$

$$-x + 5/6y = 0$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss-Seidel-iteráció nem.

2.27. **GAUSS-ELIMINÁCIÓ DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIXON** Bizonyítsuk be, hogy ha az  $A$  mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.28. **AZ ITERÁCIÓK SZEMLÉLTETÉSE** Az  $A$  városból elindul egy  $A$  jelű vonat a  $B$  város felé, vele egy időben a  $B$  városból egy  $B$  jelű  $A$  felé. A  $B$  vonat indulásával egy időben a  $B$

vonat orráról elindul egy légy is  $A$  felé, de amint találkozik az  $A$  vonattal megfordul, és addig repül, míg a  $B$  vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a  $B$  vonattal találkozik.

	$(x_0, y_0)$	$(x_1, y_1)$	$(x_2, y_2)$	$(x_3, y_3)$
$x$ : távolság $A$ -tól	0	40	48	49.6
$y$ : távolság $B$ -től	0	80	96	99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van  $A$  város  $B$ -től?

2. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a légyvel:

	$y_0$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$
$x$ : távolság $A$ -tól		30		46		49.2	
$y$ : távolság $B$ -től	0		80		96		99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van  $A$  város  $B$ -től?

3. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss-Seidel-iterációhoz?

## Megoldások

2.4. a) igen, b) igen, c) nem, d) igen, e) igen, f) nem.

2.5. Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása:  $x = 2$ ,  $y = 1$ , tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

2.6. Az első egyenletrendszer nem oldható meg a  $0 = 3$  alakú egyenlet miatt, de a második sem, hisz nincs olyan  $x$  és  $y$ , melyre  $x + y = 2$  és  $x + y = 7$  lenne, hisz  $2 \neq 7$ .

2.7. Behelyettesítés után mindkét egyenlet  $0 = 0$  alakú, amit tetszőleges  $x$  és  $y$  kielégít, így az összes  $(x, y)$  számpár megoldása az egyenletrendszernek.

2.8.  $x = 1$ ,  $y$  tetszőleges, azaz az összes  $(1, y)$  alakú számpár megoldás.

2.9. A második egyenlet behelyettesítés után  $0 = 1$  alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.10.  $x = 1$ ,  $y = 2$ , azaz  $(x, y) = (1, 2)$  az egyetlen megoldás.

2.12. a) A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ( $y = 7/3x - 2/3x$ ,  $y = -2 + 3/2x$ ), melyek a  $(2, 1)$  pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a  $(2, 3)$ , a  $(3, -2)$  vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított  $(7, 4) = 2(2, 3) + (3, -2)$  vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a  $(2, 3)$  és a  $(4, 6)$  vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a  $(3, 4)$  vektort!

2.13. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis  $2(1, 1, 2) + (1, 2, 4) = (3, 4, 8)$ . Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a  $(3, 0, 0)$  pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki

is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a  $(3, 3, 9)$  vektor is benne van e síkban, a  $(3, 3, 1)$  vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.14. A sormodell szerinti ábra az a) esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A b) esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás:  $x = 2$ ,  $y = 1$ . A c) esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az oszlopmodell szerint az a)

$$x + y = 3$$

$$x + y = 4$$

$$x + 2y = 4$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Az  $(1, 1, 1)$  és az  $(1, 1, 2)$  vektorok benne fekszenek az  $x = y$  egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A  $(3, 4, 4)$  vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A b) és c) egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az  $(1, 1, 1)$  és az  $(1, 2, 3)$  az  $x - 2y + z = 0$  egyenletű síkban van, melyben a  $(3, 4, 5)$  vektor benne van, míg a  $(3, 3, 5)$  vektor nincs benne, tehát b) megoldható, c) nem.

2.15. a) hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), b) hamis, például a 2.9. (a) ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégis sincs megoldás, c) igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.16.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak**, **de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **kétdimenziós** térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **kétdimenziós** térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.



c) Egy négy egyenletről álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az ötdimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négydimenziós** térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.17. a) Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. b) Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. c) Hamis, van lépcsős alakja minden mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. d) Hamis. e) Igaz.

2.18. a) Igaz. b) Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletről álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. c) Igaz. d) Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

2.19. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.20. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.21. Igen, mindkettőnek  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazuk megegyeznek.

2.22. Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

2.23. a) Igen. b) Nem.

2.24. A sorcsere előállítható a beszorzás és a hozzáadás segítségével, nevezetesen az  $S_i \leftrightarrow S_j$  sorcsere ekvivalens az

$$S_i + S_j, S_j - S_i, S_i + S_j, -S_j,$$

elemi sorműveletekkel. Ellenőrzésül a mátrixokon való hatásukat is megadjuk:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_j-S_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.25. Legyen  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x$	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
$y$	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x$	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
$y$	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

2.27.

2.28. A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a  $k$ -adik találkozásából kiszámítva a  $k+1$ -edik találkozássra jellemző távolságokat, az  $x_{k+1} = ay_k + b, y_{k+1} = cx_k + d$  egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és  $a, b, c$  és  $d$  értékre megoldva az  $a = 1/10, b = 40, c = 2/5, d = 80$  értékeket kapjuk, amiből a táblázat további értékei számolhatók, és az eredeti egyenletrendszer is fölírható:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{10}y &= 40 \\ -\frac{2}{5}x + y &= 80. \end{aligned}$$

Ennek megoldása  $(x, y) = (50, 100)$ , vagyis a vonatok találkozásáig az  $A$  vonat 50 km-t, a  $B$  vonat 100 km-t tesz meg. Eszerint a két város 150 km-re van egymástól.

A Gauss-Seidel-iteráció szerinti  $x_{k+1} = ay_k + b, y_{k+1} = cx_{k+1} + d$  egyenletek épp illeszkednek a feladat második táblázatához az  $a = 1/5, b = 30, c = 1, d = 50$  értékekkel. Ez az

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{5}y &= 30 \\ -x + y &= 50 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez tartozik, melynek megoldása ismét  $(x, y) = (50, 100)$ .



## *Irodalomjegyzék*

Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. <http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf>, 2002.



# Tárgymutató

- alakzat egyenletrendszere 54
- alapvektorok 31
- általános megoldás 81
- alulhatározott 69
- ASCII-kód 45
  
- balrendszer 24
- bázis 31
- bázisoszlop 78
- bázisvektorok 31
- BCD-kód 45
- bináris reláció 29
- bitvektor 45
- bővített mátrix 71
  
- csoport 13
  
- egyenletrendszer
  - numerikusan instabil 93
- egységvektor 22
- egyűthetómátrix 71
- ekvivalenciareláció 29
- ekvivalens
  - átalakítások 69
  - lineáris egyenletrendszerek 69
- elemi sorműveletek 78
- ellenőrző összeg 48
- előjelestérfogat 27
- euklideszi norma 11
- explicit 55
  
- főátló 70
- főelem 78
- főoszlop 78
- forogatónyomaték 24
  
- Gauss–Jordan-módszer 84
- Gauss–Seidel-iteráció 99
- Gauss-módszer 79
  
- hajlásszög 41
- Hamming-kód 90
- háromszögmódszer 11
- hipersík 65
- homogén lineáris egyenletrendszer
  - inhomogénhez tartozó 81
  
- implicit 54
- inkonzisztens 69
- irányított szakasz 9
- irányított szög 24
- irányvektor 55
- ISO 31-11 10
  
- Jacobi-iteráció 99
- jobbrendszer 24
- jól kondicionált 93
  
- kód
  - hossza 46
  - kódszó 46
  - kódvektor 46
- kollineáris vektor 11
- komplanáris 12
- konstans tag 67
- konzisztens 69
- koordináta 31
- koordinátarendszer 31
- korrelációs egyűthető 44
- kötött változó 80
- kötött vektor 9
  
- lépcsős alak 78
- lineáris
  - egyenlet 67
  - egyenletrendszer 68
  - kombináció 13
- lineárisan független 15, 39
- lineárisan összefüggő 15
  
- lineáris egyenletrendszer
  - konzisztens 69
- lineáris egyenletrendszer
  - alulhatározott 69
  - túlhatározott 69
- lineáris egyenletrendszerek
  - homogén 68
  - megoldása 69
- lineáris egyenletrendszerek
  - ekvivalens 69
  - inhomogén 68
  
- mátrix 70
  - ritka 71
  - soronként domináns főátlójú 101
  - sűrű 71
- megoldás
  - általános 81
  - partikuláris 81
- megoldásvektor 69
- megoldható 69
  
- norma
  - euklideszi 11
- nullvektor 10
- numerikusan instabil 93
- numerikusan stabil 93
  
- origó 10
- ortogonális 34
- ortonormált bázis 34
- oszlopmátrix 71
- oszlopvektor 32, 71
- osztályozás 29
  
- parallelepipedon 17
  - előjeles térfogata 27
- parallelogramma 17
- párhuzamos vektor 11

- paritásbit 48
- particionálás 29
- partikuláris megoldás 81
- pivotelem 78
  
- redukált lépcsős alak 83
- reflexív 30
- reláció 29
- részleges főelemkiválasztás 95
- részleges pivotálás 95
- ritka mátrix 71
- rosszul kondicionált 93
- rref függvény 87
  
- skalár 9
- skaláris szorzat 19
- skálázás 96
- sorlépcsős alak 78
- sormátrix 71
  
- soronként domináns főátló 101
- sorvektor 71
  
- szabad változó 80
- szabad vektor 10
- személyi szám 45
- szimmetrikus reláció 30
- szimultán egyenletrendszer 87
- szög 41
  
- távolság 20
- torzor 13
- tranzitív reláció 30
- túlhatározott 69
  
- vegyes szorzat 28
- vektor 10
  - abszolút értéke 11
  - azonos irányú 11
  
- egyirányú 11
- ellenkező irányú 11
- hossza 11, 20
- jelölése 10, 71
- kollineáris 11
- koordinátáinak elválasztása 71
- koordinátás alakja 31
- mátrix alakja 71
- összeg 11
- párhuzamos 11
- vektoregyenlet 54
- vektori szorzat 25
- vektorok
  - merőlegessége 41
  - szöge 20, 41
  - távolsága 41
  
- zérusvektor 10