MAT A1b – 2. ZH

1. rész – 2006-12-01 Neptunkód: _ _ _ _ _ _ Név: _____ Gyakv: _____

1. Határozzuk meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét az $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$ függvénynek. *(1 pont)*

ért. tart.: $\mathbb{R}$

ért. készlet: $(0, \frac{\pi}{2})$

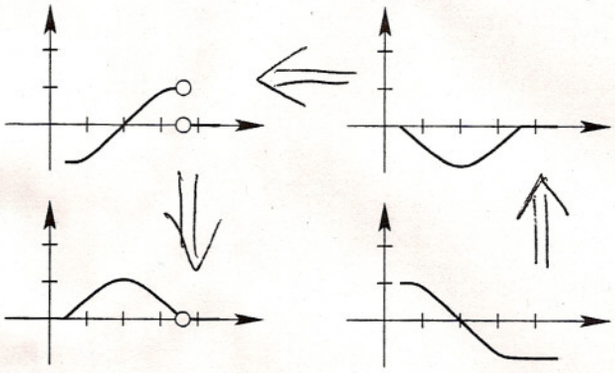
2. Egyszerűsítsük a $\operatorname{tg}(\arcsin 2x)$ kifejezést! *(2 pont)*

$$\operatorname{tg}(\arcsin 2x) = \frac{\sin(\arcsin 2x)}{\cos(\arcsin 2x)} = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

3. Teljesülnek-e a Lagrange-féle középértéktétel feltételei a $\sqrt[3]{x^2}$ függvényre, $[-1, 8]$ intervallumon? *(1 pont)*

([-1,8]-on folytonos, de) (-1,8)-on nem diffható, mert 0-ban nem diffható!

4. Rajzoljunk nyilakat (összesen hármat) az alábbi 4 grafikon közé úgy, hogy a nyíl mindig egy függvényből a deriváltja felé mutasson. *(3 pont)*



5. Határozzuk meg az alábbi határértékeket! *(2 pont)*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim\limits_{0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to +0} x \ln x = \lim\limits_{+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{+0} (-x) = 0$

6. Számítsuk ki az alábbi deriváltfüggvényeket! *(2 pont)*

a) $(\ln(1 + 2^x))' = \frac{1}{1+2^x}(1+2^x)' = \frac{2^x \ln 2}{1+2^x}$

b) $\left(\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{t^3+1}\,dt\right)' = \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$

7. Írjuk fel az e^x függvény $x_0 = 0$ pontho tartozó teljes differenciálját, és ennek segítségével adjunk lineáris közelítést $e^{0,05}$ értékére! *(2 pont)*

$(e^x)' = e^x \quad (e^x)'|_0 = 1 \qquad dy = 1 \cdot dx$

$\Rightarrow e^{0,05} - e^0 \approx dy = 1 \cdot \underbrace{0,05}_{dx}$

$\Rightarrow e^{0,05} \approx 1 + 0,05 = 1,05$

8. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! *(2 pont)*

a) $\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{x^2-1} + \arcsin x + C$

9. Mennyi az indulás utáni első 10 mp-ben az átlagsebessége annak a járműnek, melynek sebessége az indulás utáni t időpillanatban $t^2/2$, ahol $0 \le t \le 10$! *(1 pont)*

$(s =) \int_0^{10} \frac{t^2}{2}\,dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^{10} = \frac{500}{3}$

átlag: $\frac{1}{10} \cdot \frac{500}{3} = \frac{50}{3}$

10. Az alábbi állítások közül azok mellé, melyek igazak írjuk, hogy „IGAZ", de ha meg tudjuk azt a tételt nevezni, melyből következik, akkor írjuk le a *tétel nevét*! Azok mellé melyek egy igaz állítás megfordításának tekinthetők, de maguk hamisak, írjuk azt, hogy „MEGFORDÍTÁS". Azok mellé az állítások mellé, melyek nem igazak, mert egy igaz tételből egy feltétel kihagyásával készültek, írjuk le magát *a kimaradt feltételt*! *(4 pont)*

a) Ha f differenciálható a $[0, 1]$ intervallumon, és $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$, akkor van olyan c hely a $(0, 1)$ intervallumban, ahol $f'(c) = 1$. ...igaz... Darboux-tétel...

b) Ha f differenciálható az a helyen, és $f'(a) = 0$, akkor f-nek a-ban szélsőértéke van. ...MEGFORDÍTÁS...

c) Ha f (szigorúan) monoton csökkenő és differenciálható az (a, b) intervallumon, akkor minden $c \in (a, b)$ pontban fennáll a $f'(c) < 0$ reláció. ...MEGFORDÍTÁS...

d) Ha az f függvénynek F és G egy-egy primitív függvénye egy D tartományon, akkor van olyan C konstans, hogy a D-n $F = G + C$. ...D intervallum...

11. Az $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 1$ függvény mely intervallumon invertálható? Írjuk fel az $f^{-1}(x)$ függvény deriváltját az $x = 4$ helyen! *(2 pont)*

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$

valós gyökei nincsenek, mert $\sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot 5} < 0$

f' pozitív $\Rightarrow f$ (szig) mon. növekvő

$f(1) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 1$

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$