

Jelölések: T2 = Thomas 2; 7.5 = Thomas 7.5 fejezet; F4 = 4. Függelék; 1P = 1. PÉLDA; 3T = 3. TÉTEL; 2K = 2. KÖVETKEZMÉNY; ► = **kötelező bizonyítás**.

**1. Bevezetés:** • összetett függvény, függvénytranszformációk (1.5), trigonometrikus függvények (1.6) • teljes indukció (F1) • logikai műveletek, azonosságok, kétváltozós logikai azonosság bizonyítása igazságtáblával, • kvantorok, kvantoros állítások tagadása

**2. Vektorok:** • vektorműveletek (összeadás, skalárral szorzás, skaláris és vektori szorzás, vegyes szorzat), vektor abszolút értéke, két vektor szöge • vektorműveletek műveleti tulajdonságai • a skaláris, vektori és a vegyes szorzat geometriai jelentése (vektor egy másik vektorra eső merőleges vetülete és annak hossza, paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata) • milyen feltételekkel lesz  $\mathbf{ab} = 0$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{abc} = 0$  • *vektorok koordinátái*, a műveletek koordinátás alakja ► a skaláris szorzat koordinátás alakja 3-dim-ban • *másod- és harmadrendű determináns*

**3. Tételek:** • egyenes vektoregyenlete és paraméteres egyenletrendszere • sík egyenlete • koordináta-tengellyel ill. koordináta-síkkal párhuzamos egyenes és sík egyenlete • pont és egyenes/sík távolsága

**4. Komplex számok (F4):** • *komplex szám algebrai alakja*, komplex számsík • műveleti tulajdonságok, konjugált és absz. ért. tulajdonságai • *trigonometrikus alak* (F4: nem kell az  $re^{i\theta}$  alak és az Euler-formula), műveletek trig. alakban adott komplex számokkal, gyökvonás, *egységgyökök*, ► a szögek összeadódnak szorzáskor (előadáson volt) • az algebra alaptétele

**5. Függvényhatárérték:** • *függvényhatárérték* (2.3) • a határérték kiszámítása, szendvicstétel (2.2) ► összeg határértéke (2.3 6P) • jobb és bal oldali határérték, határérték a végtelenben (2.4) ►  $(\sin x)/x$  határértéke (2.4 7T), ►  $(\cos x - 1)/x$  határértéke (2.4 5P) • vízszintes és ferde aszimptota • a *végtelen határérték*, függőleges aszimptota (2.5), nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok (2.5 9P)

**6. Folytonosság (2.6):** • *pontbeli folytonosság*, intervallumon való folytonosság, folytonos függvények • folytonos függvények tulajdonságai (9T, 10T) • folytonos függvények kiterjesztése • Bolzano-tétel

**7. Differenciálás (3):** • érintő, *derivált* (2.7), deriváltfüggvény (3.1), a derivált ábrázolása, jobb és bal oldali derivált • folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata (3.1 1T), Darboux-tétel (2T) ► (3.1 1T) • deriválási szabályok (3.2) ►  $x^n$  deriváltja (a 2. SZABÁLY első bizonyítása) ► szorzatfüggvény deriváltja (5. SZABÁLY) • változási sebesség, gyorsulás (3.3) • trigonometrikus függvények deriváltja (3.4) ►  $\sin$  függvény deriváltja • összetett függvények deriváltja, láncszabály • paraméteresen megadott görbe, görbe paraméterezése (egyenes szakasz, kör, ellipszis, parabola), paraméteresen megadott görbék meredeksége • implicit függvény deriváltja (3.6), ►  $x^{p/q}$  deriváltja (3.6 4T) • kapcsolt deriváltak • linearizáció, lineáris közelítés • differenciál, becslés differenciálokkal

**8. Derivált alkalmazásai:** • függvény szélsőértékei, abszolút minimum, maximum • szélsőértéktétel (4.1 1T) • lokális maximum, minimum ► az első derivált és a lokális szélsőérték I. rész (4.1 2T) • kritikus pont ► Rolle-tétel (4.2 3T) • Lagrange-féle középértéktétel és geometriai szemléltetése • a Lagrange-féle középértéktétel következményei: csak konstans függvény deriváltja 0, azonos deriválttal rendelkező függvények konstansban különböznek • monoton függvények • első derivált teszt monoton függvényekre (4.3 3K) • az első derivált és a lokális szélsőérték II. rész • konvex, konkáv függvény • második derivált teszt a függvény konvexitására (4.3 3K) • inflexió pont • második derivált és lokális szélsőérték (4.4 5T) • határozatlan alakok (0/0,  $\infty/\infty$ ,  $0\infty$ ,  $\infty - \infty$ ), L'Hospital-szabály ► az első alak bizonyítása (4.6 6T) • Cauchy-féle középértéktétel és geometriai szemléltetése

**9. Integrálás:** • *primitív függvény, határozatlan integrál* (4.8) • Riemann-összeg (integrálközelítő összeg), felosztás és normája • *határozott integrál, mint a Riemann-összegek határértéke* • görbe alatti terület és határozott integrál • függvény átlaga (átlag/középértéke) ► középértéktétel határozott integrálokra (5.4 3T) ► a változó felső határú integrál deriváltja (Newton–Leibniz-tétel 1. rész, 5.4 4T) ► Newton–Leibniz-tétel (2. rész, 5.4 4T) • helyettesítési szabály (5.5 5T) • helyettesítés a határozott integrálban (5.6 6T) • páros és páratlan függvények határozott integrálja • görbék által határolt terület

**10. Transzcendens függvények:** • injektív (invertálható) függvény, *függvény inverze*, grafikonjaik kapcsolata, inverz függvény meghatározása • inverz függvény deriváltja (7.1 1T) • természetes logaritmusfüggvény, az  $e$  szám •  $\ln$  tulajdonságai, logaritmus deriválás • a természetes alapú exponenciális függvény, mint a természetes alapú log inverze • az  $\exp$  függvény tulajdonságai, deriváltja, integrálja ►  $\exp$  deriváltja • az  $e$ , mint határérték (7.3 4T) ► általános hatványszabály (163. o.) • az általános logaritmus és exponenciális függvény és tulajdonságaik (7.4) • függvény növekedési üteme, az  $\ln$ ,  $\exp$  és polinomfüggvények növekedési ütemének összehasonlítása  $x \rightarrow \infty$  esetén, kis ordó és nagy ordó • arkuszfüggvények: arcsin, arccos, arctg, arctg függvények és tulajdonságaik ► arcsin deriváltja • hiperbolikus függvények és inverzeik: sh, ch, th, cth, arsh, arch, arth, arcth, tulajdonságaik, deriváltjuk

**11. Integrálási technikák (8):** • parciális integrálás, parciális integrálás határozott integrálokra • racionális törtfüggvények integrálása • trigonometrikus integrálok: linearizáció (T2 52. oldal),  $\sin$ - és  $\cos$ -hatványok (T2 242. oldal) • trigonometrikus helyettesítések ( $\sqrt{a^2 - x^2}$  esetén  $x = a \sin \theta$ ) • improprius integrálok (I. típusú és II. típusú integrálok) ►  $\int_1^\infty 1/x^p dx$  integrál konvergencia, ha  $p > 1$ , divergens, ha  $p \leq 1$  (T2 279-280) • konvergenciakritériumok: összehasonlító kritérium