Matematika A1b 2006/2007 ősz
6. gyakorlat

1. A definíció lapján igazoljuk az alábbi határértékek helyességét!

   (a) $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$, $x_0 = 3$, $A = 6$, $\varepsilon = 0,01$
   (b) $f(x) = x/(1 + x^2), x_0 = \infty$, $A = 0$, $\varepsilon = 0,01$
   (c) $f(x) = 1/(x - 1)^2, x_0 = 0$, $A = 1$, $\varepsilon = 0,001$
   (d) $f(x) = 1/(x - 1)^2, x_0 = 1$, $A = \infty$, $K = 1000$
   (e) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = 1$, $A = 2, \varepsilon$
   (f) $f(x) = \sin x/x, x_0 = \infty$, $A = 0$, ε

2. Számítsuk ki az alábbi függvények határértékét a végtelenben!

   (a) $f(x) = (7x^3)/(16x^2 - 8x + 3)$
   (b) $f(x) = (9x^4 + x)/(x^4 - 4x^2 + 4)$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$
   (d) $f(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)/(2x + 3)$

3. Számítsuk ki az alábbi függvények határértékét az adott pontban!

   (a) $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$, $x_0 = 5$
   (b) $f(x) = (\cos(x + h) - \cos(x))/h$, $h_0 = 0$
   (c) $f(x) = (x^2 - x - 2)/(x^2 + 2x + 1)$, $x_0 = -2,\ 0,\ -1$ (bal/jobb!)
   (d) $f(x) = \sin 2x/\sin 3x$, $x_0 = 0$
   (e) $f(x) = \left(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}\right)/\left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right)$, $x_0 = 0$

4. Számítsuk ki az alábbi függvények ferde aszimptotáit!

   (a) $f(x) = (x^2 + 1)/x$,
   (b) $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$,
   (c) $f(x) = \left(x \cdot (2x^2 + x + 3)\right)/(2x^2 + 1)$.

5. Folytonos-e az alábbi függvény az adott helyeken? Ha lehet, tegyük azzá!

   (a) $(x^2 - 3x + 2)/(x^3 - 2x^2)$, $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ 3$,
   (b) $(x^2 - 9)/(x - 3)$, $x_0 = 3$,
   (c) $(1 - \cos x)/x^2$, $x_0 = 0$.

6. Válasszuk meg a paraméterek értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax)/x, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - x^2, & \text{ha } 0 \leqslant x < 3; \\ 2bx, & \text{ha } 3 \leqslant x \end{cases}$$

7. Egyenlet közelítő megoldása.

   (a) Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^3 - 20x + 2$ függvénynek van zérushelye a 0 és a 2 között.
   (b) Becsüljük meg ezt a gyököt!
   (c) Igazoljuk, hogy a megoldás

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{\frac{1}{3}}.$$