Közlekedésmérnöki Kar
A1 feladatsor
2006. ősz, I. hét

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be:
   (a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
   (b) $a^{2n-1} + b^{2n-1} = (a+b)(a^{2n-2} - a^{2n-3}b + a^{2n-4}b^2 - \ldots - ab^{2n-3} + b^{2n-2})$.
2. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
   (a) $1 < |x-2| < 3$
   (b) $x^2 - x - 2 \geq 0$
   (c) $\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} \leq 2$
3. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
   (a) $f(x) = \frac{5x+7}{x+1}$
   (b) $f(x) = -3\sin 2x + 8$
4. Az alábbi egyenletek milyen síkbeli alakzatokat írnak le, és mik a metszéspontjaik?
   (a) $y = 2x, x^2 + y^2 = 1$
   (b) $y - x = 1, y = x^2$
   (c) $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y = 1$
5. Igazoljuk, hogy minden természetes számra:
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6. Vegyünk fel egy síkon n darab általános helyzetű egyenest! Mutassuk meg, hogy az így kapott ,,térkép" kiszínezhető két színnel úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek!

7. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre
$$133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}.$$

8. **Harmadik hatványok összege.** Igazoljuk, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, akkor
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$