Feladatok a Matematika M2 tantárgyhoz építészmérnök hallgatóknak

összeállította: Vető Bálint

2005

Témakörök:

1. Komplex számok
2. Sajátérték, sajátvektor feladatok
3. Szeparálható és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek
4. Másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek
5. Parciális derivált, iránymenti derivált, érintősík, kétváltozós függvény szélsőértéke
6. Kettős inegrálás
7. Térgörbék kísérő triédere, ívhossz, görbület, torzió
8. Felületek megadása, felszíne, görbületi viszonyok
9. Klasszikus kombinatorikus valószínűségszámítási feladatok

Matematika M2 gyakorlat

1. feladatsor

2005. febr. 16.

1. Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon a következő komplex számokat és helyvektorukat: $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = -2 + 3i$, $z_4 = -2 - 3i$.

2. Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát:

   (a) $2 + 5i$ és $4 - 3i$,

   (b) $1 - 3i$ és $-i$.

3. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolút értékét:
$$5 + 12i, \quad (-2 + 4i)^4, \quad \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(1 + 2i)(4 + 3i)}.$$

4. (a) Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:
$$-8, \quad 1 + i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i.$$

   (b) Ezeket pedig algebrai alakba:
$$5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

5. Számítsd ki az alábbi két komplex szám szorzatát és hányadosát trigonometrikus alakban:
$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

6. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét algebrai alakban:

   (a) $(1 + i)^{12}$,

   (b) $(-2\sqrt{3} + 2i)^{-9}$.

7. Határozzuk meg az alábbi z komplex számok összes komplex n-edik gyökét:

   (a) $z = -1$, $n = 4$,

   (b) $z = -243i$, $n = 5$.

Matematika M2 gyakorlat

2. feladatsor

2005. febr. 23.

1. Keresd meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (vagyis határozd meg a sajátaltereket)!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. (ZH. 2004.)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írjuk fel a következő lineáris transzformációk mátrixát, majd határozzuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait és a karakterisztikus polinomot!
   (a) origó körüli $+90^o$-os forgatás;
   (b) $\mathcal{O}$ leképezés (minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli);
   (c) $x = y$ egyenesre való vetítés.

4. Melyek igazak az alábbi állítások közül az A mátrixra és $\underline{v}$ vektorra?
   (a) Ha $\underline{v}$ sajátvektora A-nak, akkor $\underline{v}$ sajátvektora A^2-nek;
   (b) Ha $\underline{v}$ sajátvektora A^2-nek, akkor $\underline{v}$ sajátvektora A-nak;
   (c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak;
   (d) Ha $A^2 = 0$, akkor A-nak a 0 az egyetlen sajátértéke.

5. Berci vett egy doboz Mackósajtot, melyben 6 db 60^o-os körcikk alakú sajt fér el. Este megevett belőle hármat, és betette a hűtőbe. Reggel, mikor felnyitotta a dobozt, azt vette észre, hogy a körcikkek csúcsai továbbra is a kör középpontjában maradtak, de ha az egyes sajtcikkek körívre eső csúcsait a körön végighaladva A_1, B_1-gyel, A_2, B_2-vel, ill. A_3, B_3-mal jelöljük, akkor a B_1A_2, B_2A_3 és B_3A_1 szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak. Bizonyítsd be, hogy Berci megfigyelése helyes – függetlenül attól, hogy a sajtok egymással milyen szöget zárnak be!

Matematika M2 gyakorlat

3. feladatsor

2005. márc. 9.

1. Határozzuk meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását:

   (a) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$,

   (b) $\sqrt{25 - x^2}\cos^2 y \cdot y' = 1$,

   (c) $\sin \ln y = \frac{xy}{(x^2+1)y'}$.

2. Keressük meg a $2y'(x+4) + y = 0$ differenciálegyenletnek azt a megoldásgörbéjét, amely alatti terület a $0 \leq x \leq 12$ intervallumban 20 területegység!

3. Szórjunk m tömegű anyagot oldószerbe. Az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{dx}{dt} = k(m - x)$, ahol x jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét, k arányossági tényező. Ha 1 perc alatt az anyag 20%-a oldódik fel, akkor 3 perc alatt hány százaléka? (azaz $x(0) = 0$, $x(1) = 0,2m$, $x(3) = ?$) (Vizsga, 2004.)

4. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket:

   (a) $y' + xy - x = 0$,

   (b) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

5. Határozzuk meg az $y' \cos x + y \sin x = 1$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását!

6. ZH. 2004.

$$5x + 19 = y^2\sqrt{15 + y^3}\left(x^2 + 7x + 10\right) y',$$

$$y' - \frac{2x}{x^2+4}\, y = (x^2 + 4)\cos x.$$

Matematika M2 gyakorlat

4. feladatsor

2005. márc. 16.

1. A karakterisztikus egyenlet felírása után határozzuk meg az alábbi homogén differenciálegyenletek általános megoldását:

   (a) $y'' + 3y' + 2y = 0$,

   (b) $y'' - 4y' = 0$,

   (c) $y'' + 4y = 0$,

   (d) $y'' + 6y' + 34y = 0$,

   (e) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

2. A következő feladatokban a homogén egyenlet megoldása után az inhomogén egyenlet megoldását

$$y_{\text{part}}(x) = x^r p(x) e^{\alpha x} \left\{ \begin{array}{c} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{array} \right\}$$

   alakban keressük, ahol $p(x)$ megfelelő fokszámú polinom, r pedig a rezonancia multiplicitása, vagyis hogy az $\alpha + i\beta$ komplex szám a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának hányszoros gyöke.

   (a) $y'' - 9y = 6 \cos 3x$,

   (b) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$,

   (c) $y'' + 2y' + y = x \sin x$,

   (d) $y'' - y = (2x + 3)e^x$,

   (e) $y'' + y = -4 \cos x + x$,

   (f) $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 e^{3x}$.

3. Írjuk fel az $y'' - 2y' + y = -1$ differenciálegyenletnek az $y(2) = -1$ és $y'(2) = e^2$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

Matematika M2 gyakorlat

5. feladatsor

2005. márc. 23.

1. Deriváljuk az $f(x,y,z) = e^{x^2 \sin(x-y^2z^3)}$ függvényt az összes változója szerint!
2. Számoljuk ki az $f(x,y) = x^2y^3 + \sin 3y + e^{x+2y}$ függvény első és második parciális deriváltjait, valamint az origóban az $(1,2)$ irányhoz tartozó iránymenti deriváltját!
3. Írjuk fel a $z = 3y + e^{xy^2} + 2y \arctan \frac{x}{y}$ felület érintősíkjának egyenletét a $P = (0,1)$ pontban, majd számoljuk ki a $(2,-7)$ irányú iránymenti deriváltat ugyanebben a pontban.
4. Az $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ implicit egyenletből határozzuk meg a z'_y parciális deriváltat!
5. Milyen irányban lesz az $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(-\frac{1}{2}, 1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális ill. minimális?
6. Téglatest alakú, felül nyitott, $4m^3$ térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkorák legyenek a téglatest alapélei?
7. Adjuk meg az $f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$ függvény lokális szélsőértékeit a síkon!

Matematika M2 gyakorlat

6. feladatsor

2005. márc. 30.

1. Számoljuk ki a következő téglalapokon vett integrálokat:
   (a) $\int\int_T e^{3x+4y}\mathrm{d}T$, ahol $T = \{(x,y): \ 0 \le x \le \ln 2, \ 0 \le y \le \ln 3\}$,
   (b) $\int\int_T \sin(x+y)\mathrm{d}T$, ahol $T = \{(x,y): \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.
2. Mennyi az $\int\int_T 2xy\mathrm{d}T$ integrál értéke, ha T az $y = x^2$ és $x = y^2$ egyenletű görbék által határolt korlátos tartomány?
3. A $T = \{(x,y) \ : 0 \le x \le y, \ 0 \le y \le 1\}$ halmazon számítsuk ki az $\int\int_T y\sin x\mathrm{d}T$ integrált!
4. Integráljuk polárkoordinátákra való áttéréssel az origó körüli 2 sugarú körön az $f(x,y) = 2x - 6y + 3$ függvényt!
5. Legyen $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ x \le 0, \ 0 \le y\}$. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét:
$$\int\int_T \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}T.$$
6. Határozzuk meg a $z = 25 - x^2 - y^2$ egyenletű felület $z \ge 0$ félsíkba eső részének felszínét és az általa határolt korlátos térrész térfogatát!
7. Vágjunk ki homogén lemezből egy R sugarú negyedkört (ezt nem kell tényleg megcsinálni), majd határozzuk meg a tömegközéppontját!

Matematika M2 gyakorlat

7. feladatsor

2005. ápr. 6.

1. Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = \underline{i}\sin t + \underline{j}\cos t + \underline{k}\frac{1}{\cos t}$ görbe $t = 0$ paraméterértékhez tartozó pontjában az érintő egyenes egyenletét!

2. Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát a megadott szakaszokon:

   (a) $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}, \quad -1 \leq t \leq 2,$

   (b) $\underline{r}(t) = e^{at}\cos t\underline{i} + e^{at}\sin t\underline{j} + be^{at}\underline{k}, \quad -\infty < t \leq t_0$, ahol $a > 0, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek.

3. Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$ egyenletű térgörbe kísérő triéderét a $t = -1$-hez tartozó pontban, majd írjuk fel a simulósík, a normálsík és a rektifikáló sík egyenletét!

4. Adjuk meg az $x(t) = t\cos t$, $y(t) = -t\sin t$, $z(t) = at$ görbe simulósíkjának egyenletét a koordinátarendszer kezdőpontjában ($a \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter).

5. Mennyi az $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$ görbe görbülete és torziója a $t = 2$ pontban?

6. Számítsuk ki az $x(t) = 2t$, $y(t) = \ln t$, $z(t) = t^2$ görbe görbületét és torzióját!

Matematika M2 gyakorlat

8. feladatsor

2005. ápr. 13.

1. Írjuk fel annak a hengernek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje $\underline{r}(t) = \underline{i}(2\sin t + 3\tan t) + \underline{j}2\cos t$, tengelyének iránya pedig az $\underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4\underline{k}$ vektor!

2. Írjuk fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje $\underline{r}(t) = \underline{i}\sinh t + \underline{j}\cosh t$, csúcspontja pedig az $\underline{a} = 5\underline{k}$ vektor végpontja!

3. Adjuk meg az $\underline{r}(t) = t\underline{j} + (t^2 + 4)\underline{k}$ egyenletű görbe y tengely körüli megforgatottját paraméteres alakban.

4. Számoljuk ki az $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u+v) + \underline{j}(u^2+v^2) + \underline{k}(u^3+v^3)$ felület $(2,2,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

5. Mi lesz az $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(u+v) + \underline{j}(u-v) + \underline{k}uv$ egyenletű felület $x + 2y + 3z = 32$ síkkal párhuzamos érintősíkja?

6. A Gauss-féle első főmennyiségek segítségével határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ felület $0 \le u \le 1$ és $0 \le v \le 2\pi$ paramétertartományba eső darabjának felszínét!

7. Írjuk fel paraméteresen az origó középpontú R sugarú gömb egyenletét, majd a Gauss-féle második főmennyiségek segítségével állapítsuk meg, hogy a felület $(R,0,0)$ pontja milyen típusú!

Matematika M2 gyakorlat

9. feladatsor

2005. ápr. 27.

1. Egy aktatáska zárja három számjegyű kóddal működik. Egy illetéktelen próbálkozik a kinyitásával. Mi a valószínűsége annak, hogy öt próbálkozással nem tudja kinyitni a táskát, ha feltesszük, hogy mindig más kombinációval próbálkozik?

2. Hatszor dobunk egy szabályos kockával. Mi a valószínűsége, hogy ezek közül

   (a) egyszer sem dobunk hatost,

   (b) legalább egyszer dobunk hatost?

   Mi a könnyebb: 6 dobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 dobásból legalább kétszer?

3. 22 focistából két csapatot sorsolnak ki véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy a két legjobb játékos egy csapatba kerül?

4. Bridzsben mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek együttesen k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

5. Mi a valószínűsége, hogy az ötös lottó sorsolásán a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen 42?

6. Egy kulcskarikán n kulcs van, amelyek közül csak egy illik a kinyitandó zárba. Találomra (véletlen sorrendben) próbáljuk ki a kulcsokat – ismétlés nélkül mindaddig, amíg a jó kulcsra rá nem lelünk. Kísérletünk $1, 2, \ldots, n$ próbálkozás után érhet véget. Mutassuk meg, hogy mind az n eredménynek azonosan $1/n$ a valószínűsége.

7. Egy afrikai országban a lakosság $\frac{1}{1000}$ része HIV-fertőzött. A vérvizsgálat az esetek 1%-ában ad hibás eredményt. Ha valakinek pozitív eredményt ad a teszt, mi a valószínűsége, hogy valóban fertőzött?

8. Tudjuk, hogy egy barátunk 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Öt kocsma bármelyikében egyenlő valószínűséggel lehet. Négyben már megnéztük, de nem volt ott. Mi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

Matematika M2 gyakorlat

10. feladatsor

2005. máj. 4.

1. Egy vetélkedő főnyereménye egy gépkocsi, amely három zárt ajtó valamelyike mögött van elrejtve. A vetélkedő játékos kiválaszt egy ajtót, de mielőtt a játékvezető elárulná, hogy van-e az ajtó mögött gépkocsi, kinyit a másik két ajtó közül egy olyat, amelyik mögött nincs semmi, majd felajánlja a játékosnak, hogy újból választhat a még csukott két ajtó közül. Érdemes-e a játékosnak változtatnia az eredeti választásán?

2. András és Béla (ilyen sorrendben) felváltva dobnak szabályos dobókockával. Az nyer, aki először dob ötöst. Mi a valószínűsége, hogy András nyer? És annak, hogy Béla nyer?

3. Négy postaládában összesen 12 levelet találtak. Feltéve, hogy az egyes levelek azonos valószínűséggel kerültek a négy postaláda bármelyikébe, határozzuk meg az első postaládába került levelek számának eloszlását! Milyen eloszlást kapunk, ha feltesszük, hogy a harmadik postaládába 6 levél került?

4. Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul, másodpercenként egységnyit ugrik jobbra vagy balra $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Jelölje X_n a bolha helyét n ugrás után. Határozzuk meg (páros n-re) X_n eloszlását!

5. Két játékos közül az első egyszerre 3 érmét dob fel, a második pedig kettőt. Az nyer, aki több fejet dobott, és nyereségként megkapja a másik játékos feldobott érméit. Ha a fejek száma azonos, újra dobnak. Mi az első játékos nyereségének várható értéke?

6. Egy piaci árus kosarában 100 fej gomba van, ezek közül 4 mérgező. Egy háziasszony az öttagú család minden tagjának egy-egy fej gombát vásárol ebédre. Adjuk meg a gombamérgezést kapott családtagok számának eloszlását!

7. Egy 22 fős osztályban nyolcan nem készültek egy tárgyból. A tanár 7 tanulót feleltet. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását!

8. Határozzuk meg találataink számának várható értékét az ötös lottón, ha szelvényünket találomra töltjük ki!

9. Egy „amerikai” párbaj szabályai a következők: A párbajozó 50 fehér és 50 piros golyót oszthat el két urnában tetszés szerint. Ezután bekötött szemmel húz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel valamelyik urnából. Ha fehér golyót húz, akkor életben marad, ha pirosat, akkor meghal. Hogyan ossza el a két urnában a golyókat, ha kedves az élete?

Matematika M2 gyakorlat

11. feladatsor

2005. máj. 11.

1. Egy embernek n kulcsa van, melyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha
   (a) a sikertelen kulcsokat nem választja külön (visszatevéses húzások),
   (b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).
2. Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie ahhoz, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
3. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Szajnába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos egy év alatt?
4. Az alábbiak közül melyek lehetnek az X abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényei? Ahol lehet, számoljuk ki a sűrűségfüggvényt is!

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \cos x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \sin x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

5. Az alábbiak közül melyek lehetnek abszolút folytonos eloszlás sűrűségfüggvényei? Ahol lehet, számoljuk ki az eloszlásfüggvényt!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} 4x^3 e^{-x^4} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

6. Egy kalapácsvető fogadásból azzal próbálkozik, hogy néhány forgás után bekötött szemmel dobja el a kalapácsot. A sportolót 0°-tól 300°-ig védőháló veszi körül. Mekkora a valószínűsége, hogy a hálón kívülre sikerül dobnia, ha a dobás iránya 0°-tól 360°-ig egyenletes eloszlású?
7. A $(0, 1)$ intervallumból függetlenül és egyenletes eloszlással három számot választunk. Milyen a legnagyobb választott szám eloszlása?

Matematika M2 gyakorlat

12. feladatsor

2005. máj. 18.

1. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 \quad (0 < x < 2).$$
Határozzuk meg az eloszlás várható értékét és szórását!

2. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

3. Az "1 kg" feliratú cukroszacskóban levő cukor tömege 1 várható értékű $0,02$ szórású normális eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy a zacskóban lévő cukor tömege $0,99$ és $1,02$ közé esik?

4. Százszor feldobunk egy pénzérmét. Mennyi a valószínűsége, hogy az írást eredményező dobások száma 45 és 50 közé esik?

5. A Φ függvényt használva számítsd ki a következő kifejezés közelítő értékét:
$$\sum_{k=200}^{500} \binom{1000}{k} \frac{1}{2^{1000}}$$

6. Véletlenországban egy bank pénztáránál az egyik napon előreláthatóan 60 ügyfél vesz ki pénzt. A pénztárnál az átlagos kifizetés ügyfelenként 50 tallér, 20 tallér szórással. Mennyi pénzt tartson kasszájában a pénztáros, ha $0,95$ valószínűséggel, minden fennakadás nélkül szeretné kielégíteni az ügyfelek igényeit?