2. valószínűségszámítás pótzárthelyi, 2017-05-03, FELADATOK, MEGOLDÁSOK ÉS PONTOZÁS

1. Egy városban az úttest felett elhelyezett lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama hónapokban mérve) azt az eloszlást követi, melynek eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - \frac{1}{x^5} \quad (x > 1)$.

   (a) Az élettartam négyzetének mennyi a várható értéke?

   Megoldás:
   Az élettartam sűrűségfüggvénye:

   $$f(x) = F'(x) = \frac{5}{x^6} \qquad (x > 1) \qquad\qquad \textbf{(1 pont)}$$

   Az élettartam négyzetének a várható értéke:

   $$\int_1^\infty x^2 \cdot \frac{5}{x^6}\, dx \;=\; \ldots = \frac{5}{3} \qquad\qquad \textbf{(3 pont)}$$

   (b) Kísérleti eredményekből hogyan közelíthetjük az élettartam négyzetének a várható értékét?

   Megoldás:
   A nagy számok törvénye szerint: *sok* lámpa esetén az élettartamok *négyzeteinek* az *átlaga* közelíti az élettartam négyzetének az elméleti várható értékét. **(1 pont)**.

2. **(a)** Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám szorzata sűrűségfüggvényének a képletét!

   Megoldás:
   A feladat és a megoldás a jegyzet "Random számok transzformációi" fejezetében olvasható (**3 pont**).

   (b) Mennyi a szorzat várható értéke?

   Megoldás:
   A függetlenség miatt a szorzat várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával, ezért:

   $$\mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_1 \cdot\ \mathrm{RND}_2) = \mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_1) \cdot \mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

   (**1 pont**).

   (c) Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban az a tény, hogy a szorzat várható értéke annyi, amennyi a számolásból adódik! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

   Megoldás:
   Ha két véletlen szám szorzatát sokszor vesszük, akkor a kapott számok átlaga körülbelül $\frac{1}{4}$ lesz **(1 pont)**.

3. A λ paraméterű exponenciális eloszlást az $y = \sqrt[3]{x}$ képletű köbgyök transzformációval transzformáljuk.

   (a) Határozza meg a kapott eloszlás jobboldali eloszlásfüggvényének a képletét!

   Megoldás:
   Mint tudjuk, az új $G(y)$ eloszlásfüggvény a régi $F(x)$ eloszlásfüggvényből és az $y = t(x)$ transzformáció $x = t^{-1}(y)$ inverzéből összetett függvényként adódik:

   $$G(y) = F\left(t^{-1}(y)\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}$$

   Ezért a keresett jobboldali eloszlásfüggvény:

   $$T(y) = 1 - G(y) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}$$

(2 pont)

(b) Mutassa meg a jobboldali eloszlásfüggvény felhasználásával, hogy ha egy Y élettartam ezt az eloszlást követi, akkor igaz rá a

$$\mathrm{P}(\,Y > s+t\,|\,Y > t\,) \,<\, \mathrm{P}(\,Y > s\,) \qquad (s,t>0)$$

öregedő tulajdonság!

Megoldás:
Igazolandó, hogy

$$\frac{\mathrm{P}(\,Y > s+t\,)}{\mathrm{P}(\,Y > t\,)} \,<\, \mathrm{P}(\,Y > s\,)$$

Tehát igazolandó, hogy

$$\frac{T(\,s+t\,)}{T(\,t\,)} \,<\, T(\,s\,)$$

azaz

$$T(\,s+t\,) \,<\, T(\,s\,)\cdot T(\,t\,)$$

vagyis

$$\mathrm{e}^{-\lambda\,(s+t)^3} \,<\, \mathrm{e}^{-\lambda\,s^3}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\,t^3}$$

Minkét oldal logaritmusát vesszük:

$$-\lambda\,(s+t)^3 \,<\, -\lambda\,s^3 \,-\,\lambda\,t^3$$

$(-\lambda)$ -val osztunk:

$$(s+t)^3 \,>\, s^3 \,+\, t^3$$

A kapott egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen ha a baloldali köbös kifejezést kifejtjük, akkor a jobboldalon álló tagokon túl még további pozitív tagokat is kapunk. **(2 pont)**

(c) A képlettel megadott tulajdonságot miért jogos *öregedő tulajdonság*nak nevezni?

Megoldás:
A baloldali feltételes valószínűség azt fejezi ki, hogy egy t időt meghaladó élettartam milyen eséllyel halad meg további s időtartamot. A képlet szerint ez az esély kisebb, mintha az élettartam 0-ból indulna. Tehát egy már leélt időtartam csökkenti a jövőre vonatkozó esélyeket. Ezt joggal nevezhetjük öregedésnek! **(1 pont)**

4. A szépséges Karcsú-réten a nádszálak hossza normális eloszlást követ. A nádszálaknak kb. 14 százaléka hosszabb 3 méternél, és kb. 5 százaléka rövidebb 2 méternél.

(a) Mennyi a nádhossz szórása?

Megoldás:
Jelöljük a nádszál hosszát X -szel, a várható értéket μ -vel, a szórását σ -val. Mivel $\mathrm{P}(X>3)=0.14$, ezért

$$\mathrm{P}(X<3)=\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=0.86 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A Φ függvény táblázata alapján:

$$\frac{3-\mu}{\sigma}=1.1 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Másrészt

$$\mathrm{P}(X<2)=\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)=0.05$$

Mivel a Φ függvény táblázata alapján $\Phi(1.6)=0.95$, ezért $\Phi(-1.6)=0.05$, így:

$$\frac{2-\mu}{\sigma}=-1.6$$

μ -re és σ -ra két egyenletet kaptunk. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\sigma = \frac{1}{2.7} \quad (= 0.37) \qquad\qquad \mu = \frac{7}{2.7} \quad (= 2.59) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a nádhossz szórása $\sigma = \frac{1}{2.7} \quad (= 0.37)$.

(b) Mennyi az az x érték, amire teljesül, hogy 25 nádszálat egymás után helyezve a hosszak összege 0.1 valószínűséggel nagyobb x-nél?

Megoldás:
25 nádszál hosszának az összege normális eloszlású

$$25 \cdot \mu = 25 \cdot \frac{7}{2.7} = \frac{175}{2.7} \quad (= 64.81)$$

várható értékkel és

$$\sqrt{25} \cdot \sigma = 5 \cdot \frac{1}{2.7} = \frac{5}{2.7} \quad (= 1.85)$$

szórással **(1 pont)**. Mivel a Φ függvény táblázata alapján $\Phi(1.3) = 0.9$, ezért az

$$\frac{x - \frac{175}{2.7}}{\frac{5}{2.7}} = 0.9$$

egyenlet megoldása adja a keresett x értéket:

$$x = \frac{175}{2.7} + 0.9\,\frac{5}{2.7} = \frac{179.5}{2.7} \quad (= 66.48) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		